
 POLITECHNIKA OPOLSKA	KATEDRA FIZYKI	
	LABORATORIUM FIZYKI	
SPRAWDZANIE TWIERDZENIA STEINERA		

Zgodnie z II zasadą dynamiki dla ruchu postępowego, gdy na punkt materialny o masie m działa stała i niezrównoważona siła wypadkowa F , to punkt ten porusza się prostoliniowym ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem a . Taki sam efekt osiąga się przykładając stałą i niezrównoważoną siłę do środka masy dowolnego, objętościowego ciała. W każdym z wymienionych przypadków wartość przyspieszenia a ruchu jest wprost proporcjonalna do wielkości niezrównoważonej siły F i posiada jej zwrot i kierunek:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \left[\frac{m}{s^2} \right] \quad (1)$$

Z ruchem obrotowym mamy do czynienia w przypadku, gdy niezrównoważoną siłę przyłożymy do punktu materialnego ograniczonego więzłem o pewnej długości r . Wtedy tor jego ruchu punktu będzie okręgiem o promieniu r . Identyczny efekt nastąpi po przyłożeniu siły do objętościowego ciała w taki sposób, by wektor siły nie leżał na prostej przechodzącej przez środek masy ciała.

Moment siły M jest wektorem zależnym od siły F i odległości r od osi obrotu punktu jej przyłożenia. Jest przyczyną ruchu obrotowego i jest zdefiniowany w następujący sposób:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [N \cdot m] \quad (2)$$

Natomiast wartość momentu siły obliczamy korzystając z właściwości iloczynu wektorowego:

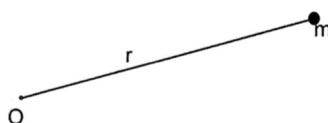
$$M = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F}) \quad (3)$$

W opisie kinematycznym ruch obrotowy charakteryzowany jest następującymi wielkościami: drogą kątową α , prędkością kątową ω , przyspieszeniem kątowym ε , które są odpowiednikami drogi s , prędkości V i przyspieszenia a w ruchu postępowym. Analogiczna zasada odpowiedniości występuje między parametrami dynamicznymi tych ruchów.

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego ma postać:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} \quad \left[\frac{rad}{s^2} \right] \quad (4)$$

gdzie: ε – przyspieszenie kątowe,
 M – wypadkowy moment sił działających na ciało,
 I – moment bezwładności ciała.



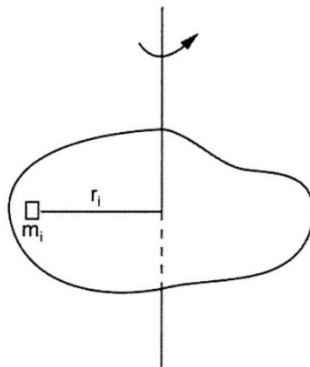
Rys. 1 Punkt materialny o masie m w odległości r od osi obrotu O

Miarą bezwładności ciała w ruchu obrotowym nie jest masa, lecz jego moment bezwładności I . W przypadku punktu materialnego o masie m , moment bezwładności względem osi obrotu przechodzącej przez punkt O (Rys. 1.) definiowany jest jako iloczyn masy m i kwadratu odległości r punktu materialnego od punktu O :

$$I \stackrel{\text{def}}{=} m \cdot r^2 \quad [kg \cdot m^2] \quad (5)$$

W przypadku dowolnej bryły sztywnej o masie m , którą traktujemy jako zbiór nieprzemieszczających się względem siebie objętościowych jej fragmentów (Rys.2.), moment bezwładności I względem dowolnej osi obrotu jest sumą iloczynów mas m_i poszczególnych jej fragmentów i kwadratów ich odległości r_i od osi

obrotu. Jak nietrudno zauważyć, moment bezwładności jest wielkością addytywną (sumuje się) i dla układu sztywnie połączonych ciał złożony jest z sumy momentów bezwładności poszczególnych jej fragmentów.



Rys. 2. Bryła sztywna z wyróżnionym i -tym jej objętościowym fragmentem o masie m_i , odległym o r_i od osi obrotu.

Wobec powyższego, po umownym podziale bryły sztywnej na n fragmentów, jej moment bezwładności I wyraża się następująco:

$$I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \dots + m_n \cdot r_n^2 = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 \quad (6)$$

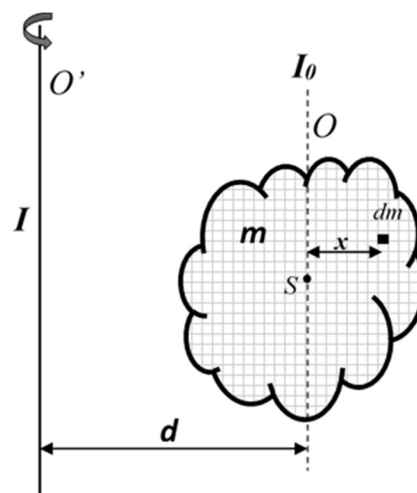
Przy podziale bryły sztywnej na nieskończoną liczbę jednakowych, infitezymalnych elementów mas dm (tzn. $dm \rightarrow 0$), jej moment bezwładności wyznacza się metodą analityczną:

$$I = \int_0^m r^2 dm \quad (7)$$

W tablicach fizycznych zamieszczane są wyrażenia analityczne pozwalające obliczyć momenty bezwładności brył sztywnych posiadających kształty regularnych brył geometrycznych.

Dowolną oś obrotu bryły sztywnej, która przechodzi przez środek jej masy nazywamy osią środkową. W literaturze często stosuje się oznaczenie I_0 wyróżniając w ten sposób moment bezwładności bryły sztywnej względem osi środkowej. Tylko dla wykonanej z jednorodnego materiału kuli pełnej, lub częściowo i centralnie wewnątrz wydrążonej, wartość I_0 jest niezależna od wyboru jej osi środkowej.

Wielkość momentu bezwładności każdej bryły sztywnej silnie zależy od odległości osi obrotu względem środka jej masy. Na Rys. 3. w sposób schematyczny przedstawiono sytuację, w której wykonana z jednorodnego materiału bryła sztywna o masie m i znanym momencie bezwładności I_0 , wykonuje ruch obrotowy względem osi O' , przesuniętej o d i równoległej do O .



Rys. 3. Jednorodna bryła sztywna o masie m i momencie bezwładności I_0 w ruchu obrotowym względem osi O' przesuniętej równoległe o d względem środkowej osi obrotu O . S - środek masy bryły, x - odległość od osi środkowej elementu masy dm .

Widoczny na Rys. 3. element masowy dm bryły sztywnej, zgodnie z definicją (5), posiada moment bezwładności dI_d :

$$dI_d = (d + x)^2 \cdot dm \quad (8)$$

Całkując obustronnie powyższe wyrażenie:

$$\int dI_d = \int (d + x)^2 dm \quad (9)$$

Lewa część otrzymanego wyniku równa jest całkowitemu momentowi bezwładności I_d bryły sztywnej względem osi O' :

$$I_d = \int d^2 dm + \int (2 \cdot d \cdot x) dm + \int x^2 dm \quad (10)$$

natomiast część prawa wyrażenia (9), po uwzględnieniu wielkości stałych, przyjmuje postać:

$$I_d = d^2 \int dm + 2 \cdot d \cdot \int x dm + \int x^2 dm \quad (11)$$

Poszczególne składniki prawej części powyższego wyrażenia posiadają następujące znaczenia: pierwszy składnik $d^2 \int dm = d^2 \cdot m$, w drugim składniku całka $\int x dm = M_O$ – to moment masowy bryły sztywnej względem jej osi środkowej O , z kolei całka $\int x^2 dm = I_0$ – jest momentem bezwładności bryły sztywnej względem środkowej osi obrotu (wynika bezpośrednio z (7)). Po uwzględnieniu zauważonych zależności, wyrażenie (11) należy zapisać następująco:

$$I_d = m \cdot d^2 + 2 \cdot d \cdot M_O + I_0 \quad (12)$$

Moment masowy dowolnej bryły obliczany względem jej osi środkowej zawsze ma wartość równą zero, $M_O = 0$. Uwzględnienie tego wyniku prowadzi do prostszej postaci zależności (12):

$$I_d = I_0 + m \cdot d^2 \quad (13)$$

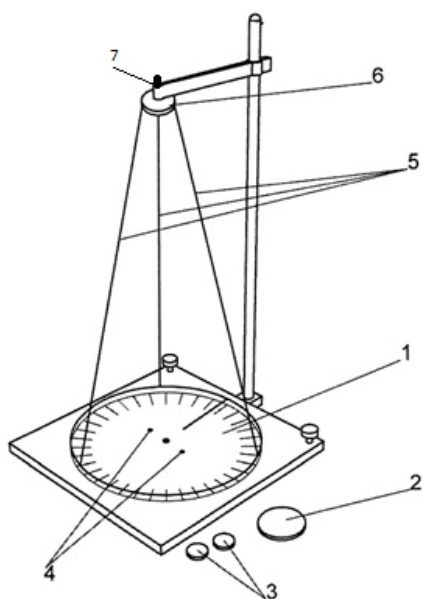
Zależność (13) wyraża **twierdzenie Steinera**, które można wyrazić słowami:

Moment bezwładności I_d ciała względem dowolnej osi obrotu równy jest sumie momentu bezwładności I_0 tej bryły względem równoległej do niej osi środkowej i iloczynu masy ciała m przez kwadrat odległości d tych osi.

Znajomość wartości momentu bezwładności dowolnego ciała (bryły sztywnej) względem jej osi środkowej pozwala z użyciem twierdzenia Steinera, wyznaczyć wartość tej wielkości względem dowolnej innej osi równoległej do osi środkowej. Twierdzenie Steinera odgrywa szczególnie ważną rolę w projektowaniu lub analizach układów wieloelementowych. Jego szczególną przydatność doceniamy chcąc wyznaczyć moment bezwładności monolitycznych ciał lub heterogenicznych układów, których kształty są bardzo skomplikowane. Stosując analityczną metodę można dokonać skończonego ich podziału na elementarne, mniejsze części o kształtach zbliżonych do regularnych brył geometrycznych. Całkowity moment bezwładności takich brył można wyznaczyć przy pomocy dobrze znanych dla tych brył zależności pozwalających obliczać momenty ich bezwładności względem osi środkowych, twierdzenia Steinera oraz korzystając z addytywności momentu bezwładności. W wielu rozwiązaniach technicznych stosuje się układy o zmiennej geometrii kształtu lub układy złożone z wielu elementów masowych, które w sposób zamierzony (sterowany) mogą zmieniać odległość od osi obrotu.

Alternatywą dla metod analitycznych są doświadczalne sposoby pomiaru momentu bezwładności, w których bryłę poddaje się działaniu różnych zewnętrznych czynników. Mierząc wartości wielkości fizycznych związanych zależnością z momentem bezwładności, wyznacza się metodą pomiaru pośredniego wartość momentu bezwładności. Zaletą metod doświadczalnych jest ich niezależność od kształtów i materiałów z których wykonano bryły.

UKŁAD POMIAROWY



Rys. 4. Schemat układu pomiarowego.

Schemat układu pomiarowego przedstawiono na Rys. 4. Jego główną częścią jest ruchoma tarcza 1 wykonana ze sztywnego materiału, zawieszona na cienkich, słabo rozciągliwych i o znikomych masach trzech stalowych niciach. Drugie końce nici zaczepione są do nieruchomej tarczy 6. W obu tarczach przygotowano otwory ułatwiające mocowanie do nich nici. Układ zawieszenia umożliwia tarczy wykonywanie skrętnych ruchów drgających wokół nieruchomej osi obrotu przechodzącej prostopadłe przez jej środek. W podstawie przyrządu znajduje się podziałka kątowa służąca do obserwacji i oceny wielkości wychyleń tarczy z położenia równowagi oraz poziomica do oceny stanu wypoziomowania przyrządu przed rozpoczęciem pomiarów.

Ruchomą tarczę 1 układu wprowadza się w drgania przy pomocy uchwytu 7. W tym celu uchwyt należy wyzwoić z gniazda podnosząc go, następnie zdecydowanym ruchem nieznacznie obrócić, i z powrotem osadzić w gnieździe.

W Dodatku zamieszczonym w końcowej części niniejszej instrukcji znajduje się wyprowadzenie wzoru (14) na moment bezwładności I układu, zgodnie z którym zależność okresu T drgań od momentu bezwładności I układu złożonego z ruchomej tarczy i umieszczonymi na niej badanymi bryłami sztywnymi jest następująca:

$$I = \frac{m \cdot g \cdot R \cdot S}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi^2 \cdot L} \cdot T^2 \quad (14)$$

w której: T – okres drgań układu,
 m – masa układu drgającego,
 R – odległość od osi obrotu otworu zaczepu nici w tarczy ruchomej,
 S – względna odległość otworów zaczepów nici w tarczy nieruchomej,
 L – długość nici,
 g – wartość przyspieszenia ziemskiego.

Zależność (14) charakteryzuje współzależności między stałymi parametrami charakteryzującymi układ pomiarowy i parametrami (I oraz T) o wartościach zmiennych, zależne od bezwładności badanych brył sztywnych.

Dla danej konstrukcji urządzenia pomiarowego część z obecnych w zależności (14) wielkości jest niezmiennicza dla procesu pomiarowego i można je zastąpić jedną stałą A :

$$A = \frac{g \cdot R \cdot S}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi^2 \cdot L} \left[\frac{m^2}{s^2} \right] \quad (15)$$

Oczywiście dla pomiarów momentu bezwładności niezbędną jest znajomość stałej A , dlatego jednym z pierwszych zadań pracy z urządzeniem jest wyznaczenie jej wartości.

Całkowita masa m_u układu drgającego składa się z masy m_T ruchomej tarczy oraz masy m_B badanej bryły sztywnej (lub układu ciał tworzących jedną bryłę sztywną):

$$m_u = m_T + m_B \quad (16)$$

Wobec powyższych zależność (14) przyjmuje praktyczną postać, wygodną do obliczania wartości momentów bezwładności I_u badanych układów:

$$I_u = A \cdot m_u \cdot T^2 \quad (17)$$

Należy mieć na uwadze, że każdy wynik otrzymany z użyciem wzoru (17) będzie w sobie zawierać oprócz momentu bezwładności badanej bryły również wartość momentu bezwładności I_T tarczy ruchomej. Dlatego ważnym jest znajomość dobrze określonej wartości tej wielkości.

Do zalet przedstawionego układu pomiarowego należy zaliczyć jego niezależność pomiarową od zróżnicowania badanych brył.

STANOWISKO DO BADAŃ. METODA BADAŃ. CEL ĆWICZENIA.

Stanowisko do badań wyposażone jest w: przyrząd z ruchomą tarczą drgającą, suwmiarkę do pomiaru odległości między środkami otworów, tradycyjną suwmiarkę (do pomiaru średnic walców), linijkę i wagę z odczytem cyfrowym. Do badań przygotowano zestaw wykonanych ze stopu PA6 walców o zbliżonych wartościach średnic i mas. W centralnych miejscach podstaw każdego z walców z jednej strony wykonany jest niewielki otwór, z drugiej – bolec centrujący. Bolce walców wraz z otworami ułatwiają w sposób jednoznaczny łączyć walce w jeden układ i umieszczać je na ruchomej tarczy. W środku ruchomej tarczy wykonano otwór O przez który przechodzi główna oś obrotu, natomiast różnych odległościach od osi obrotu wykonano pary otworów do osadzania walców. Zakłada się, że każdy z otworów pary jest równoodległy od osi obrotu. Stosując kombinacje liczby przemieszczonych walców i ich odległości od osi obrotu, w sposób zamierzony można wpływać na wartość całkowitego momentu bezwładności układu.

Gdy p identycznych walców umieści się w centralnym miejscu na tarczy tak, że osie środkowe każdego z walców pokryją się z główną osią drgań, to całkowity moment bezwładności I_u układu wynosi:

$$I_u = I_T + p \cdot I_{0,K} \quad (18)$$

gdzie: I_u - całkowity moment bezwładności układu, I_T - moment bezwładności ruchomej tarczy, $I_{0,K}$ - moment bezwładności walca względem głównej osi obrotu, p - liczba identycznych walców.

Przemieszczenie pierwszych dwóch walców z centrum tarczy do miejsc z otworami równoodległymi o d od osi obrotu układu, zgodnie z twierdzeniem Steinera, zwiększy moment bezwładności układu. Każdy z przeniesionych walców będzie charakteryzowany momentem bezwładności $I_{d,K}$ liczonym względem głównej osi obrotu, a całkowity moment bezwładności układu wyniesie:

$$\begin{aligned} I_2 &= I_T + (p - 2) \cdot I_{0,K} + 2 \cdot I_{d,K} \\ I_2 &= I_T + (p - 2) \cdot I_{0,K} + 2 \cdot (I_{0,K} + m_K \cdot d^2) \\ I_2 &= I_T + p \cdot I_{0,K} + 2 \cdot m_K \cdot d^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Gdy drugą parę walców przeniesiemy na identyczną odległość d , to związana z tym zmiana momentu bezwładności układu będzie skutkować końcową wartością:

$$\begin{aligned} I_4 &= I_T + (p - 4) \cdot I_{0,K} + 4 \cdot (I_{0,K} + m_K \cdot d^2) \\ I_4 &= I_T + p \cdot I_{0,K} + 4 \cdot m_K \cdot d^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Ogólnie, przeniesienie parami ze środka tarczy liczby n walców zestawu na stałą odległość d_x od osi obrotu, zwiększy moment bezwładności I_u układu do wielkości opisanej zależnością:

$$I_u = I_T + p \cdot I_{0,K} + n \cdot m_K \cdot d_x^2 \quad (21)$$

gdzie: $n = 0, 2, 4, \dots$; przy czym: $n_{max} = p = 8$.

Każdej konfiguracji łożen n walców na tarczy odpowiadać będzie okres drgań T_u , i związany z tym moment bezwładności I_u , którego wartość można wyznaczyć doświadczalnie z zależności (17).

Głównym celem ćwiczenia jest doświadczalna weryfikacja twierdzenia Steinera na podstawie danych otrzymanych z pośrednich pomiarów momentów bezwładności bryły sztywnej o zróżnicowanej konfiguracji położen jej fragmentów.

W ramach realizacji celu głównego zostaną wyznaczone doświadczalne zależności momentu bezwładności I_u układu z drgającą tarczą od:

- A) wielkości części masy układu odsuniętej na stałą odległość d_x od głównej osi obrotu układu,
- B) kwadratu odległości d odsunięcia od osi głównej stałej masy.

Wyznaczone doświadczalne zależności zostaną poddane ocenie zgodności charakterów ich zmian w odniesieniu do odpowiadających im zależności teoretycznych, wynikających twierdzenia Steinera zapisanego równaniem (57), adekwatnie do warunków eksperymentu.

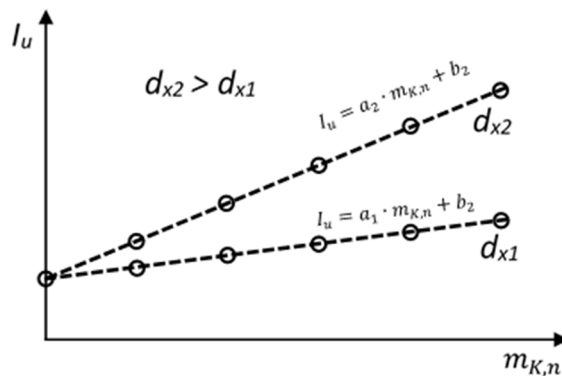
Poniżej omówiono wyniki przewidywanych przez twierdzenie Steinera zależności A) oraz B).

A) Zakłada się, że w stanie początkowym na środku tarczy znajduje się $p = p_1$ walców. Odsunięcie od środka tarczy pewnej liczby walców na stałą odległość $d = d_x$ oznacza oddalenie części masy układu od głównej osi obrotu. Gdy przemieszczenia walców wykonuje się stopniowo, to według (21) - z każdym fragmentem masowym $m_{K,n}$ odpowiadającym n walcom związany jest wzrost wartości momentu bezwładności I_u :

$$I_u = I_T + p_1 \cdot I_{0,K} + m_{K,n} \cdot d_x^2 \quad (22)$$

$$m_{K,n} = n \cdot m_K$$

Powyższy proces przedstawiono na wykresie zależności I_u od $m_{K,n}$ który tworzy zbiór dyskretnych wartości (Rys. 5.) reprezentowanych punktami tworzącymi prostoliniowy trend łożen.



Rys. 5. Przewidywana przez twierdzenie Steinera zależność (22) momentu bezwładności I_u układu z drgającą tarczą od masy $m_{K,n}$ walców odsuniętych na stałą odległość d_x od osi głównej. Na wykresie podano ogólne równania prostych dopasowania do punktów odpowiadającym różnym wartościom odległości d_x .

Najlepszym dopasowaniem do trendu ułożeń punktów jest prosta o ogólnym równaniu:

$$I_u = a_1 \cdot m_{K,n} + b_1 \quad (23)$$

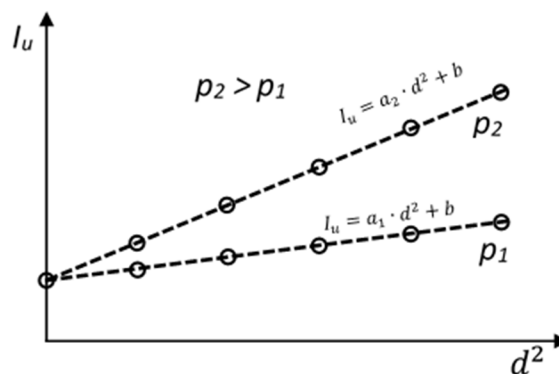
Z porównania odpowiednich współczynników równań (22) i (23) wynika, że:

$$a_1 = d_x^2 \quad \text{oraz} \quad b_1 = I_T + p_1 \cdot I_{0,K} \quad (24)$$

B) Zakłada się, że w stanie początkowym na środku tarczy znajduje się $p = p_2$ walców. Gdy ze środka tarczy stopniowemu odsuwaniu o d podlegać będzie pewna stała liczba n walców, to związany z tym moment bezwładności układu opisuje wyrażenie:

$$I_u = I_T + p_2 \cdot I_{0,K} + m_{K,n} \cdot d^2 \quad (25)$$

Proces ten przedstawiono na wykresie (Rys. 6.) zależności I_u od d^2 , na którym zbiór dyskretnych wartości (Rys. 5.) reprezentowany jest punktami tworzącymi prostoliniowy trend ułożeń.



Rys. 6. Przewidywana przez (21) zależność momentu bezwładności I_u układu z drgającą tarczą od kwadratu odległości d odsunięcia od osi głównej stałej liczby p walców. Na wykresie podano ogólne równania prostych dopasowania do trendów ułożeń punktów odpowiadającym różnym liczbom przenoszonych walców.

Najlepszym dopasowaniem do trendu ułożeń punktów jest prosta o ogólnym równaniu:

$$I_u = a_2 \cdot d^2 + b_2 \quad (26)$$

Z porównania odpowiednich współczynników równań (25) i (26) wynika, że:

$$a_2 = m_{K,n} \quad \text{oraz} \quad b_2 = I_T + p_2 \cdot I_{0,K} \quad (27)$$

Otrzymanie na podstawie danych z doświadczenia prostoliniowych zależności w układach współrzędnych przedstawionych na wykresach Rys. 5. i Rys. 6. jest potwierdzeniem słuszności twierdzenia Steinera.

Natomiast na podstawie doświadczalnie wyznaczonych parametrów (24) i (27) prostych dopasowań można:

C) dokonać weryfikacji wartości d_x i $m_{K,n}$ otrzymanych metodą pomiaru bezpośredniego z wyznaczonymi z wykorzystaniem ich nachyleń: $d_x = \sqrt{a_1}$ oraz $m_{K,n} = a_2$. Zgodność porównywanych wartości stanowi potwierdzenie wewnętrznej spójności twierdzenia Steinera.

D) wyznaczyć wartość momentu bezwładności ruchomej tarczy układu na podstawie odciętych b_1 i b_2 :

$$I_T = \frac{b_1 \cdot p_2 - b_2 \cdot p_1}{p_2 - p_1} \quad (28)$$

WAŻNE: prawidłowe użycie opisanych metod badań wymaga zastosowania różnych liczb p_1 i p_2 walców do każdej części ćwiczenia!

WYKONANIE ĆWICZENIA

POMIARY WIELKOŚCI STAŁYCH UKŁADU DOŚWIADCZALNEGO

1. Odczepić nici od obu tarcz. Z użyciem liniału zmierzyć długość L każdej nici (*mieć na uwadze tylko ich ruchome części*). Podczas pomiaru nić powinna być lekko naprężona. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać wartości L oraz wartość niepewności wzorcowania $\Delta_d(L)$ użytego liniału i oszacowanej przez eksperymentatora niepewności $\Delta_e(L)$.
2. Przygotować specjalną suwmiarkę do pomiaru odległości między środkami otworów. Na tarczy ruchomej zmierzyć odległości R między otworem środkowym i otworami do mocowania końców nici. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać wartości R oraz niepewność wzorcowania $\Delta_d(R)$ użytej suwmiarki.
UWAGA: Do wartości każdego wyniku pomiaru należy dodać 5 mm, ze względu na stałe początkowe przesunięcie środków kołców suwmiarki.
3. W nieruchomej tarczy wybrać do pomiarów trzy jednakowo odległe od środka otwory mocowania końców nici. Z użyciem suwmiarki z pkt. 2. i tylko dla tych otworów zmierzyć odległości S między ich środkami. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać oznaczenie cyfrowe x wybranych otworów, zmierzone wartości S oraz wartość niepewności wzorcowania $\Delta_d(S)$ użytej suwmiarki.
4. Suwmiarką z pkt. 2. wykonać pomiary odległości d_{ij} ($i = 1, 2, \dots, 5$; $j = 1, 2$) każdego z przesuniętych otworów ruchomej tarczy względem jej otworu środkowego O . W Tabeli Pomiarów zapisać wartości d .
5. Wypoziomować i wytarować wagę. Zważyć pojedynczo każdy z walców zestawu. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać wartości ich mas m .
6. Zważyć pustą tarczę. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać wartość masy m_T oraz wartość niepewności wzorcowania $\Delta_d(m)$ użytej wagi. Przyjąć wartość odpowiadającą dwóm jednostkom najmniej znaczącej cyfry wyniku ważenia jako niepewność eksperymentatora $\Delta_e(m)$.
7. Sprawdzić wypoziomowanie układu. Gdy konieczne, dokonać korekty przy pomocy obrotowych nóżek podstawy.
8. Doczepić nici do tarczy obrotowej, następnie podwiesić ją pod nieruchomą tarczą.

POMIARY CZASÓW DRGAŃ UKŁADU

Przed rozpoczęciem tej części ćwiczenia wykonać kilka prób wprowadzenia układu w drgania.

W tym celu należy delikatnie podnieść i uwolnić z jarzma chwytak połączony z nieruchomą tarczą. Następnie należy nim nieznacznie skrócić, po czym z powrotem ostrożnie wprowadzić do jarzma. Czynności te należy wykonywać płynnie i bez zbędnego pośpiechu. Ruch dolnej tarczy powinien być wyłącznie ruchem obrotowo-zwrotnym względem jednej – głównej dla układu - osi obrotu.

WAŻNE: Ruch tarczy nie może zachodzić ze zbyt dużą amplitudą drgań - kąt jej maksymalnego skręcenia nie powinien przekraczać wartości 15° .

A) Pomiar zależności momentu bezwładności I_u układu od liczby n walców odsuniętych na stałą odległość d_x od osi głównej

10. Tę część ćwiczenia wykonać z wszystkimi ($p_1 = 8$) walcami. Walce ustawić „w piramidkę” na środku tarczy obrotowej.
11. Wprawić w ruch drgający tarczę z walcami. W dowolnym momencie, gdy wychylenie tarczy będzie maksymalne, włączyć stoper i rozpocząć odliczanie cykli drgań. Zmierzyć czas t_0 trwania $q = 30 - 50$ drgań (*Pomiary wszystkich czasów wykonywać dla identycznej wartości q . Prowadzący zajęcia może narzucić liczbę drgań.*). W Tabeli Pomiarów 2 zapisać liczbę q cykli drgań, wartość zmierzonego czasu t_0 i związane z pomiarem bezpośrednim wartości niepewności: wzorcowania $\Delta_d(t)$ oraz oszacowaną eksperymentatora, $\Delta_e(t)$.
12. Wybrać jedną z dostępnych par otworów oznaczonych numerami 3, 4 lub 5. W Tabeli Pomiarów 2 zapisać numer x wybranej pary otworów.
13. Zdjąć dwa walce z piramidki i po jednym umieścić w wybranych otworach. Wykonać pomiar czasu $t_{x,2}$ drgań układu. W Tabeli Pomiarów 2 zapisać wartość zmierzonego czasu.
14. Przełożyć do otworów x kolejne dwa walce, nakładając je na walce wcześniej tam umieszczone. Wykonać pomiar czasu $t_{x,4}$ drgań układu.
15. Przekładając kolejne pary walców wykonać pomiary czasów drgań, $t_{x,6}$, i następnych. W Tabeli Pomiarów 2 zapisać wartości zmierzonych czasów.

B) Pomiar zależności momentu bezwładności I_u układu od odległości d odsunięcia od osi głównej stałej liczby p_2 walców

16. Do pomiarów wybrać parzystą liczbę p_2 walców ($p_2 < p_1$). Zapisać wartość p_2 w Tabeli Pomiarów 2.
17. Ustawić walce w „piramidkę” na środku ruchomej tarczy.
18. Wykonać pomiar czasu t_{d0} drgań układu.
19. Połowę liczby walców przenieść do otworu oznaczonego numerem 1, natomiast pozostałą ich część umieścić w drugim otworze o takim samym numerze, leżącym po drugiej stronie osi obrotu układu. Zmierzyć czas t_{d1} drgań układu. Otrzymane wyniki zapisać w Tabeli Pomiarów 2.
20. Przenieść walce do otworów 2. Zmierzyć czas t_{d2} , a jego wartość zapisać w Tabeli Pomiarów 2.
21. Przenieść walce do otworów 3. Zmierzyć czas t_{d3} , a jego wartość zapisać w Tabeli Pomiarów 2.
22. Przenosząc walce do kolejnych otworów, wykonać pomiary czasów t_{di} . Otrzymane wyniki zapisać w Tabeli Pomiarów 2.
23. Zdjąć walce z tarczy.

TABELA POMIARÓW 1

	długości nici			tarcza				tarcza ruchoma: odległości przesuniętych otworów względem głównej osi obrotu											
				ruchoma		nieruchoma, otwory: ...													
<i>i</i>	<i>L_i</i>	$\Delta_d(L)$	$\Delta_e(L)$	<i>R</i>	$\Delta_d(R)$	<i>S</i>	$\Delta_d(S)$	<i>d₁₁</i>	<i>d₁₂</i>	<i>d₂₁</i>	<i>d₂₂</i>	<i>d₃₁</i>	<i>d₃₂</i>	<i>d₄₁</i>	<i>d₄₂</i>	<i>d₅₁</i>	<i>d₅₂</i>	$\Delta_d(d)$	
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
1																			
2																			
3																			
masy walców i tarczy ruchomej																			
	<i>m₁</i>	<i>m₂</i>	<i>m₃</i>	<i>m₄</i>	<i>m₅</i>	<i>m₆</i>	<i>m₇</i>	<i>m₈</i>	<i>m_T</i>	$\Delta_d(m)$	$\Delta_e(m)$								
	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]							

TABELA POMIARÓW 2

liczba drgań układu: q = (30 ≤ q ≤ 50)												
UKŁAD A					UKŁAD B							
czasy drgań układów z różną liczbą <i>n</i> walców odsuniętych osi głównej na stałą odległość <i>d_x</i>					czasy drgań układów ze stałymi liczbami <i>n</i> walców odsuniętych od osi głównej na odległościach <i>d</i>							
liczba walców w układzie, p₁ = 8 numer otworu: x = (<i>x</i> = 2, 3, 4 lub 5)					liczba walców w układzie: p₂ = (<i>n</i> = 2, 4 lub 6)							
<i>t_{x0}</i>	<i>t_{x2}</i>	<i>t_{x4}</i>	<i>t_{x6}</i>	<i>t_{x8}</i>	<i>t_{d0}</i>	<i>t_{d1}</i>	<i>t_{d2}</i>	<i>t_{d3}</i>	<i>t_{d4}</i>	<i>t_{d5}</i>	$\Delta_d(t)$	$\Delta_e(t)$
[s]	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]

OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

W tabelach zapisy wartości wszystkich wielkości wykonać z użyciem jednostek układu SI. W zapisach eliminować nadmierne liczby zer nieznaczących, wprowadzając do ich jednostek stosowne mnożniki. Wartość wielkości i jej niepewność muszą posiadać taką samą jednostkę (w tym identyczny mnożnik).

1. Wykonać przykład obliczenia średniej długości L nici:

$$L = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{3} \quad (29)$$

2. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ($k = 2$) całkowitej niepewności: $U(L)$:

$$U(L) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(L))^2 + (\Delta_e(L))^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^3 (L - L_i)^2}{3 \cdot (3-1)}} \quad (30)$$

3. Wykonać przykład obliczenia średniej odległości R otworów mocowań nici od osi głównej:

$$R = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3} \quad (31)$$

4. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ($k = 2$) całkowitej niepewności: $U(R)$:

$$U(R) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(R))^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^3 (R - R_i)^2}{3 \cdot (3-1)}} \quad (32)$$

5. Wykonać przykład obliczenia średniej odległości S między otworami mocowań nici do nieruchomej tarczy:

$$S = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} \quad (33)$$

6. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ($k = 2$) całkowitej niepewności odległości S , $U(S)$:

$$U(S) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(S))^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^3 (S - S_i)^2}{3 \cdot (3-1)}} \quad (34)$$

7. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ($k = 2$) całkowitej niepewności bezpośrednich pomiarów mas walców $U(m)$ i pustej tarczy, $U(m_T)$:

$$U(m) = U(m_T) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(m))^2 + (\Delta_e(m))^2}{3}} \quad (35)$$

8. Wykonać przykład obliczenia średniej masy m_K walca zestawu:

$$m_K = \frac{\sum_{i=1}^8 m_i}{8} \quad (36)$$

9. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ($k = 2$) całkowitej niepewności wyznaczenia średniej masy walca zestawu, $U(m_K)$:

$$U(m_K) = \sqrt{(U(m))^2 + k^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^8 (m_K - m_i)^2}{8 \cdot (8-1)}} \quad (37)$$

10. Wykonać przykład obliczenia wartości stałej A układu:

$$A = \frac{g \cdot R \cdot S}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi^2 \cdot L} \quad (38)$$

Do obliczeń użyć wartości stałych g i π zawierających odpowiednio dużą liczbę cyfr znaczących.

11. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności $U(A)$:

$$U(A) = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial R} U(R)\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial S} U(S)\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial L} U(L)\right)^2} = A \cdot \sqrt{\left(\frac{U(R)}{R}\right)^2 + \left(\frac{U(S)}{S}\right)^2 + \left(\frac{U(L)}{L}\right)^2} \quad (39)$$

12. Otrzymanymi wynikami uzupełnić Tabelę Wyników 1.

TABELA WYNIKÓW 1

L	$U(L)$	R	$U(R)$	S	$U(S)$	m_K	$U(m_K)$	m_T	$U(m_T)$	A	$U(A)$
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[kg]	[kg]	[kg]	[kg]	$\frac{m^2}{s^2}$	$\frac{m^2}{s^2}$

13. Dla $n > 2$ wykonać przykład obliczenia masy walców odsuwanych od osi obrotu w badanych układzie A:

$$m_{K,n} = n \cdot m_K \quad (40)$$

14. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności $U(m_{K,n})$:

$$U(m_{K,n}) = \sqrt{\left(\frac{\partial m_{K,n}}{\partial m_K} U(m_K)\right)^2} = \sqrt{(n \cdot U(m_K))^2} = n \cdot U(m_K) \quad (41)$$

15. Wykonać obliczenia dla pozostałych wartości n , a otrzymane rezultaty zapisać w Tabeli Wyników 2A.

16. Dla układu A z liczbą walców p_1 wykonać przykład oszacowania jego całkowitej masy m_u :

$$m_u = m_T + p_1 \cdot m_K \quad (42)$$

17. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności $U(m_u)$:

$$U(m_u) = \sqrt{\left(\frac{\partial m_u}{\partial m_T} U(m_T)\right)^2 + \left(\frac{\partial m_u}{\partial m_K} U(m_K)\right)^2} = \sqrt{(U(m_T))^2 + (p_1 \cdot U(m_K))^2} \quad (43)$$

18. Wykonać obliczenia dla układu B z liczbą walców p_2 . Otrzymane rezultaty odpowiednio zapisać w Tabelach Wyników 2A i 2B.

19. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ($k = 2$) całkowitej niepewności bezpośredniego pomiaru odległości d , $U(d)$:

$$U(d) = k \cdot u(d) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(d))^2}{3}} \quad (44)$$

20. Dla dowolnej (i) pary otworów wykonać przykład obliczenia ich średniej odległości d_i od głównej osi obrotu układu:

$$d_i = \frac{d_{i,1} + d_{i,2}}{2} \quad (45)$$

21. Wykonać przykład oszacowania wartości całkowitej niepewności wyznaczenia $U(d_i)$:

$$U(d_i) = \sqrt{\left(\frac{\partial d_i}{\partial d_{i,1}} U(d_{i,1})\right)^2 + \left(\frac{\partial d_i}{\partial d_{i,2}} U(d_{i,2})\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} U(d_{i,1})\right)^2 + \left(\frac{1}{2} U(d_{i,2})\right)^2} = \frac{U(d)}{\sqrt{2}} \quad (46)$$

22. Dla dowolnej średniej wartości d wykonać przykład obliczenia jej kwadratu:

$$d^2 = d \cdot d \quad (47)$$

23. Dla danych z poprzedniego obliczenia wykonać przykład oszacowania wartości niepewności $U(d^2)$:

$$U(d^2) = \sqrt{\left(\frac{\partial d^2}{\partial d} U(d)\right)^2} = \sqrt{(2 \cdot d \cdot U(d))^2} = 2 \cdot d \cdot U(d) \quad (48)$$

24. Wykonać obliczenia w odniesieniu do pozostałych otworów, a otrzymane rezultaty zapisać w Tabeli Wyników 2B.

25. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ($k = 2$) całkowitej niepewności pomiaru czasu drgań układów, $U(t)$:

$$U(t) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(t))^2 + (\Delta_e(t))^2}{3}} \quad (49)$$

26. Dla dowolnego układu wykonać przykład obliczenia okresu T_u drgań:

$$T_u = \frac{t}{q} \quad (50)$$

27. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności $U(T_u)$:

$$U(T_u) = \sqrt{\left(\frac{\partial T_u}{\partial t} U(t)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{q} U(t)\right)^2} = \frac{U(t)}{q} \quad (51)$$

28. Wykonać pozostałe obliczenia $U(T_u)$ dla obu układów, a otrzymane rezultaty zapisać w Tabelach Wyników 2A i 2B.

29. Wykonać przykład obliczenia momentu bezwładności I_u dla jednej z badanych konfiguracji układu:

$$I_u = A \cdot m_u \cdot T_u^2 \quad (52)$$

30. Dla danych z poprzedniego przykładu wykonać przykład oszacowania wartości niepewności $U(I_u)$:

$$U(I_u) = \sqrt{\left(\frac{\partial I_u}{\partial A} U(A)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_u}{\partial m_u} U(m_u)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_u}{\partial T_u} U(T_u)\right)^2} = I_u \cdot \sqrt{\left(\frac{U(A)}{A}\right)^2 + \left(\frac{U(m_u)}{m_u}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{U(T_u)}{T_u}\right)^2} \quad (53)$$

31. Wykonać pozostałe obliczenia, a otrzymanymi wartościami uzupełnić Tabele Wyników 2A i 2B.

TABELA WYNIKÓW 2A

układy z liczbą n walców odległych o $d_x = \dots\dots$ [m] od głównej osi układu całkowita liczba walców w układzie, $p_1 = \dots\dots$								
n	$m_{K,n}$	$U(m_{K,n})$	m_u	$U(m_u)$	T_u	$U(T_u)$	I_u	$U(I_u)$
[-]	[kg]	[kg]	[kg]	[kg]	[s]	[s]	[kg·m ²]	[kg·m ²]
0	0	0						
2								
4								
6								
8								

32. Na podstawie danych zawartych w Tabeli Wyników 2A wykonać wykres zależności momentu bezwładności I_u układu od masy $m_{K,n}$ walców przesuniętych względem osi obrotu na stałą odległość d_x . Przerywaną kreską poprowadzić prostą wyznaczającą trend ułożenia punktów doświadczalnych.

33. Porównać charakter zmian I_u na otrzymanym wykresie do przewidywań wynikających z rozważań teoretycznych (Rys. 7. i zamieszczony pod nim komentarz do wykresu). Stosowne uwagi i spostrzeżenia zamieścić we wnioskach z ćwiczenia.

34.Z użyciem funkcji REGLINP (arkusz Excel) wyznaczyć wartości parametrów równania prostej najlepszego dopasowania do trendu ułożenia punktów. Wyniki zapisać w Tabeli Wyników 3A.

TABELA WYNIKÓW 3A

parametry równania prostej	nachylenie		odcięta		miara jakości dopasowania
	a_1	$u(a_1)$	b_1	$u(b_1)$	R^2
	[m ²]	[m ²]	[kg · m ²]	[kg · m ²]	[-]
przed zaokrągleniem					
po zaokrągleniu					

35.Na podstawie wyznaczonej wartości a_1 wykonać przykład wyznaczenia odległości d_x odsunięcia walców od osi obrotu układu:

$$d_x = \sqrt{a_1} \quad (54)$$

36.Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności $u(d_x)$:

$$u(d_x) = \sqrt{\left(\frac{\partial d_x}{\partial a_1} u(a_1)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{a_1}} u(a_1)\right)^2} = \frac{u(a_1)}{2\sqrt{a_1}} \quad (55)$$

37.Tabela Wyników 2B.

TABELA WYNIKÓW 2B

układy ze stałą liczbą $n = p_2$ walców odległych o d od głównej osi układu całkowita liczba walców w układzie, $p_2 =$										
x	d	$U(d)$	d^2	$U(d^2)$	m_u	$U(m_u)$	T_u	$U(T_u)$	I_u	$U(I_u)$
[-]	[m]	[m]	[m ²]	[m ²]	[kg]	[kg]	[s]	[s]	[kg·m ²]	[kg·m ²]
0	0	0	0	0						
1										
2										
3										
4										
5										

38.Na podstawie danych zawartych w Tabeli Wyników 2B wykonać wykres zależności momentu bezwładności I_u układu od kwadratu odległości d odsunięcia stałej liczby walców od osi obrotu. Przerwaną kreską poprowadzić prostą wyznaczającą trend ułożenia punktów doświadczalnych.

39.Porównać charakter zmian I_u na otrzymanym wykresie do przewidywań wynikających z rozważań teoretycznych (Rys. 8. i zamieszczony pod nim komentarz do wykresu). Stosowne uwagi i spostrzeżenia zamieścić we wnioskach z ćwiczenia.

40.Z użyciem funkcji REGLINP (arkusz Excel) wyznaczyć wartości parametrów równania prostej najlepszego dopasowania do trendu ułożenia punktów. Otrzymane wyniki zapisać w Tabeli Wyników 3B.

TABELA WYNIKÓW 3B

parametry równania prostej	nachylenie		odcięta		miara jakości dopasowania
	a_2	$u(a_2)$	b_2	$u(b_2)$	R^2
	[kg]	[kg]	[kg · m ²]	[kg · m ²]	[-]
przed zaokrągleniem					
po zaokrągleniu					

41.W zbadanym układzie B liczba n odsuwanych walców od osi obrotu była równa całkowitej liczbie p_2 walców w tym układzie. Biorąc pod uwagę równania (27) i otrzymaną wartość a_2 , wykonać przykład wyznaczenia wartości masy m_K walca:

$$m_K = \frac{a_2}{p_2} \quad (56)$$

42. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności $u(m_K)$:

$$u(m_K) = \sqrt{\left(\frac{\partial m_K}{\partial a_2} u(a_2)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{p_2} u(a_2)\right)^2} = \frac{u(a_2)}{p_2} \quad (57)$$

43. Wykonać przykład wyznaczenia wartości momentu bezwładności I_T ruchomej tarczy układu:

$$I_T = \frac{b_1 \cdot p_2 - b_2 \cdot p_1}{p_2 - p_1} \quad (58)$$

44. Oszacować wartość całkowitej niepewności $u(I_T)$:

$$u(I_T) = \sqrt{\left(\frac{\partial I_T}{\partial b_1} u(b_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_T}{\partial b_2} u(b_2)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p_2}{p_2 - p_1} u(b_1)\right)^2 + \left(-\frac{p_1}{p_2 - p_1} u(b_2)\right)^2} = \frac{\sqrt{(p_2 \cdot u(b_1))^2 + (p_1 \cdot u(b_2))^2}}{p_2 - p_1} \quad (59)$$

45. Wykonać przykład wyznaczenia wartości momentu bezwładności $I_{0,K}$ walca układu względem głównej osi obrotu:

$$I_{0,K} = \frac{b_1 - b_2}{p_1 - p_2} \quad (60)$$

46. Oszacować wartość całkowitej niepewności $u(I_{0,K})$:

$$u(I_{0,K}) = \sqrt{\left(\frac{\partial I_{0,K}}{\partial b_1} u(b_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{0,K}}{\partial b_2} u(b_2)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{p_1 - p_2} u(b_1)\right)^2 + \left(-\frac{1}{p_1 - p_2} u(b_2)\right)^2} = \frac{\sqrt{(u(b_1))^2 + (u(b_2))^2}}{p_1 - p_2} \quad (61)$$

WNIOSKI

W pierwszej części wniosków omówić charakter doświadczalnie wyznaczonych zależności, porównując je do przewidywań wynikających z twierdzenia Steinera (patrz - część wstępna instrukcji).

W dalszej części wniosków zamieścić z wartościami średnich mas m_K walca układu i odległości d_x stałego przesunięcia walców uzyskanych na podstawie wykonania pomiarów metodą bezpośrednią oraz z pomiarów pośrednich (w oparciu o parametry równań linii trendów zbadanych zależności).

METODA WYZNACZENIA	masa walca		odległość przesunięcia	
	m_K	$U(m_K)$	d_x	$U(d_x)$
	[kg]	[kg]	[m]	[m]
POMIAR BEZPOŚREDNI				
POMIAR POŚREDNI				

Dokonać porównania wartości otrzymanych przy pomocy różnych metod, kierując się oceną zbieżności zakresów ich wartości (uwzględniając wartości niepewności ich wyznaczenia).

Dokonać podsumowania (z użyciem obiektywnych argumentów) przeprowadzonego na drodze doświadczalnej dowodu słuszności twierdzenia Steinera.

Podać wraz z niepewnościami wartości wyznaczonych momentów bezwładności: ruchomej tarczy i walca. Ocenić dokładność otrzymanych wyników na podstawie względnych procentowych wartości ich niepewności.

LITERATURA

- [1] HALLIDAY D., RESNICK R., WALKER J.: Podstawy fizyki t.2, PWN, Warszawa, 2005.
- [2] SZYDŁOWSKI H.: Pracownia fizyczna, PWN, 1989.
- [3] Ćwiczenia Laboratoryjne z Fizyki (praca zbiorowa), Skrypt Nr 279, Politechnika Opolska 2007.

DODATEK

WYPROWADZENIE WZORU NA OKRES T DRGAŃ SKRĘTNYCH TARCZY UKŁADU POMIAROWEGO

Drgania harmoniczne proste wykonywane przez dowolny układ są skutkiem działającej na niego siły sprężystej F , o której wiadomo, że ma wartość proporcjonalną do wielkości wychylenia x układu z położenia równowagi, natomiast zwrot jej wektora stale jest skierowany do punktu równowagi układu.

$$F = -k \cdot x \quad (1)$$

Obecna w równaniu stała proporcjonalności k , to współczynnik sprężystości układu, natomiast znak „-” informuje o przeciwnym do wektora wychylenia x zwrocie siły F (ciągłe wskazywanie punktu równowagi przez wektor siły).

Dla skręcających odkształceń sprężystych pomiędzy wielkością odkształcenia α (kątem skręcenia) a momentem siły M odpowiedzialnej za ten efekt zachodzi prosta proporcjonalność:

$$M = -D \cdot \alpha \quad (2)$$

w której: M – odpowiedzialny za odkształcenie skrętne moment siły,
 α – kąt skręcenia (wychylenie kątowe), $[\alpha] = rad$

D - moment kierujący (współczynnik sprężystości ciała na odkształcenia skrętne), $[D] = \frac{N \cdot m}{rad}$

Korzystając z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego zapisujemy związek między momentem siły M , momentem bezwładności I bryły sztywnej oraz jej przyspieszeniem kątowym ε :

$$I \cdot \varepsilon = M, \quad \text{przy czym: } \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \quad (3)$$

Gdy działający na bryłę sztywną niezrównoważony moment siły M powodowany jest wypadkową siłą o cechach siły sprężystości, to równanie (3) z uwzględnieniem (2), przyjmuje postać:

$$I \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = -D \cdot \alpha \quad (4)$$

Wprowadzając do (4) stałą ω_0 zdefiniowaną poniżej:

$$\omega_0^2 = \frac{D}{I} \quad (5)$$

sprowadzamy równanie (4) do postaci:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \omega_0^2 \cdot \alpha = 0 \quad (6)$$

Z analitycznego punktu widzenia (6) jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, mającym dwa alternatywne rozwiązania w postaci zależnych od czasu t funkcji $\alpha(t)$ oraz pewnych stałych: α_0, ω_0 i θ :

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \theta) \quad (7)$$

lub:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \theta) \quad (8)$$

Rozwiązania równania (6), to okresowe w czasie funkcje o identycznym charakterze zmian wartości, co wynika z podobieństwa właściwości trygonometrycznych funkcji sinus i kosinus. Ogólna stała θ obecna w rozwiązaniach (7) i (8) nosi nazwę fazy początkowej ruchu, a jej wartość zależy od sposobu rozpoczęcia drgań. Na potrzeby dalszych rozważań wartość jej przyjmuje się równą zero. Również do dalszych analiz przyjmuje się jako rozwiązanie równania ruchu (6) tylko funkcję opisaną równaniem (8). Wobec powyższego:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \quad (9)$$

Zgodnie z funkcją (8) chwilowe wychylenia z położenia równowagi opisują ograniczony w przestrzeni ruch bryły sztywnej, czyli drgania, będące przykładem ruchu okresowego (cyklicznego). Maksymalne wartości wychyleń: $+\alpha_0$ lub $-\alpha_0$, nazywamy amplitudą drgań, którą układ osiąga w momentach czasowych, gdy funkcja sinus przyjmuje wartość +1 lub -1. Okres drgań T , to czas potrzebny na wykonanie jednego cyklu ruchu drgającego, jednocześnie jest to czas w którym argument funkcji sinus w (9) zmieni wartość o 2π :

$$\omega_0 \cdot T = 2 \cdot \pi \quad (10)$$

Wobec tego między stałą ω_0 i okresem drgań T istnieje związek:

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad (11)$$

Stałą ω_0 nazywamy częstością kołową drgań własnych lub pulsacją. Jej wymiarem jest $\left[\frac{rad}{s}\right]$

Z porównania (5) z (9) wynika, że dla danego układu okres T drgań jest niezmienny, a jego wartość uwarunkowana jest właściwościami sprężysto-inercyjnymi układu. Okres T spełnia ogólną zależność:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (12)$$

Gdy układ jest zdolny do obrotów bryłą sztywną, to pod działaniem skręcającego momentu M siły (sprężystości), wykonuje okresowy ruch obrotowo-zwrotny. Charakter tego ruchu posiada wszystkie cechy drgań składających się z identycznych cykli, powtarzających się z okresem T , w których tarcza doznaje odchylenia (skręceń, torsji) kątowych, nawrotów i przejść przez położenie równowagi. Przy założeniu braku sił oporu ośrodka, układ traktujemy jako izolowany (nie tracący energii całkowitej), wobec tego jego drgania są swobodne.

Z zasady zachowania energii wynika, że w każdej chwili całkowita energia mechaniczna układu izolowanego ma identyczną (niezmienną) wartość. W rozważanym układzie całkowita energia E jest sumą:

$$E = E_o + E_p \quad (13)$$

gdzie: E_o – zależna od czasu chwilowa wartość energii ruchu obrotowego tarczy,

E_p – zależna od czasu chwilowa wartość energii potencjalna tarczy w ziemskim polu grawitacyjnym (z każdym wychyleniem tarczy z położenia równowagi związane jest jej uniesienie się ponad poziom odpowiadający stanowi spoczynku).

W ruchu układu występują szczególne momenty czasowe, gdy wartość całkowitej energii E układu równa jest tylko maksymalnej wartości jednej z jej składowych ($E_{o,max}$ lub $E_{p,max}$). W chwili gdy układ osiągnie wychylenie równe amplitudzie drgań, prędkość jego ruchu równa jest zero ($E_o = 0$), a wzniesienie tarczy ponad poziom spoczynkowy przyjmuje wartość maksymalną, h_{max} . W innych momentach, gdy drgająca tarcza mija położenie równowagi, wzniesienie jej ponad poziom spoczynkowy równe jest zero ($E_p = 0$), a prędkość kątowa jej ruchu ma wartość maksymalną, ω_{max} . Zatem można stwierdzić, że zgodnie z zasadą zachowania energii prawdziwą jest równość wartości maksymalnych: grawitacyjnej energii potencjalnej wzniesienia tarczy i energii jej ruchu obrotowego:

$$m \cdot g \cdot h_{max} = \frac{I \cdot \omega_{max}^2}{2} \quad (14)$$

W zależności (14) symbolem m oznaczono całkowitą masę układu, natomiast symbolem I – całkowity moment jego bezwładności. Należy zaznaczyć, że termin „całkowity” uwzględnia sytuacje, w których tarcza może być pusta lub dodatkowo obciążona badanymi bryłami sztywnymi.

Mając na uwadze (9) i (11), funkcję chwilowej wartości wychylenia α tarczy z położenia równowagi możemy zapisać wzorem:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad (15)$$

Natomiast jej chwilowa prędkość kątowa ω wynosi:

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{2\pi}{T} \cdot \alpha_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad (16)$$

Tarcza osiąga maksymalną wartość prędkości kątowej, ω_{max} , w momentach czasu $t = 0, \frac{1}{2}T, T, \frac{3}{2}T \dots$

Wtedy w zależności (16) czynnik $\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = 1$, stąd:

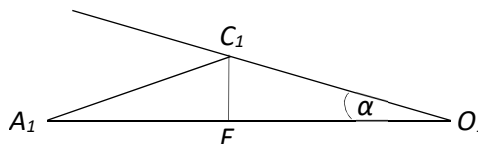
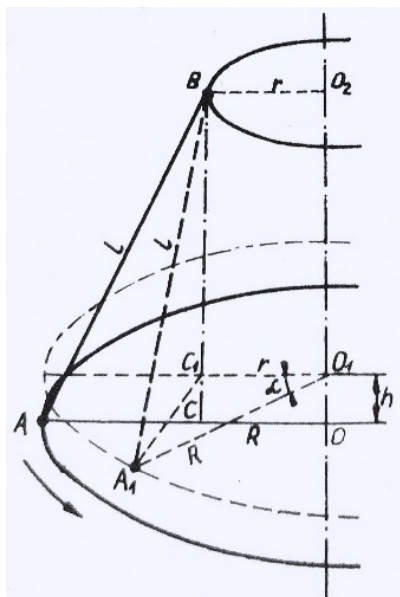
$$\omega_{max} = \frac{2\pi}{T} \cdot \alpha_0 \quad (17)$$

Po uwzględnieniu (17) w równaniu (14), otrzymuje się:

$$m \cdot g \cdot h_{max} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot I \cdot \alpha_0^2}{T^2} \quad (18)$$

W laboratoryjnych warunkach bezpośrednio pomiary wartości h_{max} lub α_0 nie należą do najprostszych. Bez specjalnego wyposażenia stanowiska jakość uzyskanych wyników pomiarów może być niezadowalająca dla eksperymentatora. Dlatego w dalszej części przedstawiona zostanie dodatkowa analiza obecnych w układzie, i jeszcze nie omówionych, współzależności go cechujących.

Poniżej zostanie wykazane, h_{max} oraz α_0 można zastąpić zależnościami zawierającymi łatwiej mierzalne wielkości charakteryzujące układ doświadczalny.



Oznaczenia na schematach:

- O, O_2 – punkty środków geometrycznych odpowiednio: tarczy obrotowej i górnego nieruchomego krążka. Punkty leżą na osi obrotu tarczy.
- A, B – punkt zaczepienia końca nici,
- C – rzut pionowy punktu B na powierzchnię tarczy,
- A_1, C_1 – nowe położenia punktów A i C po wychyleniu (skręceniu) tarczy o kąt α ,
- E – punkt pomocniczy,
- α – kąt wychylenia tarczy z położenia równowagi,
- r – odległość zaczepu końca nici od osi obrotu,
- R – odległość zaczepu końca nici od osi obrotu,
- L – długość nici,
- h – wysokość wzniesienia tarczy odpowiadająca jej wychyleniu o α .

Rys. 1. Schematy do wyznaczenia zależności na wielkość h wzniesienia tarczy.

Z właściwości geometrycznych układu, którego schemat przedstawiono na Rys. 1. wynika, że po odchyleniu tarczy z położenia równowagi wysokość h jej wzniesienia można wyrazić długościami odcinków BC i BC_1 :

$$h = BC - BC_1 \quad (19)$$

Dokonując tożsamościowego przekształcenia powyższej zależności:

$$h = (BC - BC_1) \frac{BC + BC_1}{BC + BC_1} = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1} \quad (20)$$

otrzymuje się:

$$h = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1} \quad (21)$$

Długości boków trójkąta prostokątnego ABC spełniają twierdzenie Pitagorasa:

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 \quad (22)$$

a po uwzględnieniu fizycznych parametrów układu, można je wyrazić poprzez:

$$(BC)^2 = L^2 - (R - r)^2 \quad (23)$$

Z kolei dla długości boków trójkąta prostokątnego A_1BC_1 zachodzi zależność:

$$(BC_1)^2 = (A_1B)^2 - (A_1C_1)^2 \quad (24)$$

Warto zauważyć, że bok A_1C_1 to jednocześnie: przeciwprostokątna trójkąta A_1C_1E , w którym długość boku A_1E wynosi:

$$A_1E = R - r \cdot \cos(\alpha) \quad (25)$$

i przyprostokątna trójkąta C_1EO_1 , z boki C_1E o długości:

$$C_1E = r \cdot \sin(\alpha) \quad (26)$$

Korzystając z zależności (15) i (16) i twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta A_1C_1E , kwadrat jego przeciwprostokątnej A_1C_1 :

$$(A_1C_1)^2 = (A_1E)^2 + (C_1E)^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha) \quad (27)$$

Uwzględniając wynik (27) oraz wiedząc, że długość $A_1B = L$, wyrażenie (24) przyjmuje postać:

$$(BC_1)^2 = L^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha)) \quad (28)$$

Podstawiając (23) (28) do (21) otrzymujemy wzór:

$$h = \frac{L^2 - (R-r)^2 - L^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha)}{BC + BC_1} \quad (29)$$

który po uproszczeniu wyrażenia w liczniku, przyjmuje postać:

$$h = \frac{2 \cdot R \cdot r \cdot (1 - \cos(\alpha))}{BC + BC_1} \quad (30)$$

Zakładając, że drgania tarczy będą odbywać się z niewielkimi wartościami amplitudy, co również oznacza małe kąty jej wychyleń z położenia równowagi, dla niektórych z obecnych w (30) fragmentów wyrażen można dokonać przybliżeń:

$$1 - \cos(\alpha) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx \frac{1}{2} \alpha^2 \quad (31)$$

$$BC \approx BC_1 \approx L \quad (32)$$

Po podstawieniu (31) i (32) do (30), a następnie dokonaniu niezbędnych uproszczeń otrzymanego wyrażenia, amplituda wychYLENIA tarczy $\alpha = \alpha_0$ i maksymalne jej wzniesienie $h = h_{max}$ przyjmują relację:

$$h_{max} = \frac{R \cdot r \cdot \alpha_0^2}{2 \cdot L} \quad (33)$$

Po wstawieniu do wcześniej wyprowadzonego wzoru (18) otrzymanej zależności (33) zostaje zrealizowany cel, którego wynikiem jest zastąpienie w (18) kłopotliwych do pomiaru wielkości (h_{max} i α_0), łatwiej mierzalnymi wielkościami R , r oraz L .

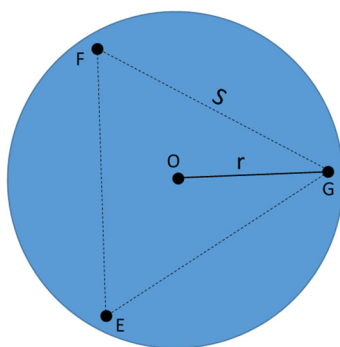
$$m \cdot g \cdot \frac{R \cdot r \cdot \alpha_0^2}{2 \cdot L} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot I \cdot \alpha_0^2}{T^2} \quad (34)$$

Po przekształceniu (34) otrzymuje się:

$$I = \frac{m \cdot g \cdot R \cdot r}{4 \cdot \pi^2 \cdot L} \cdot T^2 \quad (35)$$

Środkowa część nieruchomej tarczy jest w sposób stały przymocowana do konstrukcji układu, co uniemożliwia wykonanie bezpośrednich pomiarów odległości otworów mocowań nici od osi obrotu. Na Rys. 2. środki tych otworów oznaczono symbolami E, F, G. Ich umiejscowienie na tarczy pozwala z dobrym przybliżeniem przyjąć, że można je potraktować jako wierzchołki trójkąta równobocznego o długości boku S . Korzystając z twierdzenia Pitagorasa i cech trójkąta równobocznego, można łatwo wykazać związek względnej odległości S otworów i odległości r każdego z otworów od osi obrotu:

$$r = \frac{S}{\sqrt{3}} \quad (36)$$



Rys. 2. Układ położeń na nieruchomej tarczy otworów E, F, G służących do mocowania zawiesi nici. Przez punkt O przechodzi oś obrotu układu, prostopadła do powierzchni tarczy.

Uwzględnienie wyrażenia (36) w zależności (35) prowadzi do zależności:

$$I = \frac{m \cdot g \cdot R \cdot S}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi^2 \cdot L} \cdot T^2 \quad (37)$$

W której oznaczono: T – okres drgań układu,
 m – całkowita masa układu drgającego,
 R – odległość otworu zaczepu nici od osi obrotu (środka ruchomej tarczy),
 S – odległość między otworami zaczepów nici w nieruchomej tarczy
 L – długość nici,
 g – wartość przyspieszenia ziemskiego.

Powyzsza zależność stanowi podstawę metody pośredniego pomiaru momentu bezwładności I w oparciu o znajomość okresu T jego drgań i może być stosowana do dowolnych układów brył sztywnych.