
 <b>POLITECHNIKA</b> <b>OPOLSKA</b>	KATEDRA FIZYKI	
	LABORATORIUM FIZYKI	
<b>POMIAR MOMENTU BEZWŁADNOŚCI BRYŁY SZTYWNEJ  W UKŁADZIE Z DRGAJĄCĄ TARCZĄ</b>		

Zgodnie z II zasadą dynamiki dla ruchu postępowego, gdy na punkt materialny o masie  $m$  działa stała i niezerównoważona siła wypadkowa  $F$ , to punkt ten porusza się prostoliniowym ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem  $a$ . Taki sam efekt osiąga się przykładając stałą i niezerównoważoną siłę do środka masy dowolnego, objętościowego ciała. W każdym z wymienionych przypadków wartość przyspieszenia  $a$  ruchu jest wprost proporcjonalna do wielkości niezerównoważonej siły  $F$  i posiada jej zwrot i kierunek:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \left[ \frac{m}{s^2} \right] \quad (1)$$

Z ruchem obrotowym mamy do czynienia w przypadku, gdy niezerównoważoną siłę przyłożymy do punktu materialnego ograniczonego więzmem o pewnej długości  $r$ . Wtedy tor jego ruchu punktu będzie okręgiem o promieniu  $r$ . Identyczny efekt nastąpi po przyłożeniu siły do objętościowego ciała w taki sposób, aby wektor siły nie leżał na prostej przechodzącej przez środek masy ciała.

Moment siły  $M$  jest wektorem zależnym od siły  $F$  i odległości  $r$  od osi obrotu punktu jej przyłożenia. Jest przyczyną ruchu obrotowego i jest zdefiniowany w następujący sposób:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [N \cdot m] \quad (2)$$

Natomiast wartość momentu siły obliczamy korzystając z właściwości iloczynu wektorowego:

$$M = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F}) \quad (3)$$

W opisie kinematycznym ruch obrotowy charakteryzowany jest następującymi wielkościami: drogą kątową  $\alpha$ , prędkością kątową  $\omega$ , przyspieszeniem kątowym  $\varepsilon$ , które są odpowiednikami drogi  $s$ , prędkości  $V$  i przyspieszenia  $a$  w ruchu postępowym. Analogiczna zasada odpowiedniości występuje między parametrami dynamicznymi tych ruchów.

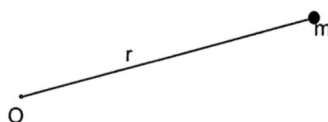
II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego ma postać:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} \quad \left[ \frac{rad}{s^2} \right] \quad (4)$$

gdzie:  $\varepsilon$  – przyspieszenie kątowe,

$M$  – wypadkowy moment sił działających na ciało,

$I$  – moment bezwładności ciała.



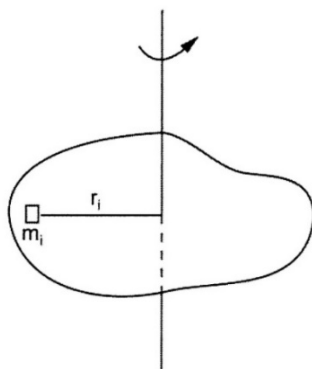
**Rys. 1** Punkt materialny o masie  $m$  w odległości  $r$  od osi obrotu  $O$

Miarą bezwładności ciała w ruchu obrotowym nie jest masa, lecz jego moment bezwładności  $I$ . W przypadku punktu materialnego o masie  $m$ , moment bezwładności względem osi obrotu przechodzącej przez punkt  $O$  (Rys. 1.) definiowany jest jako iloczyn masy  $m$  i kwadratu odległości  $r$  punktu materialnego od punktu  $O$ :

$$I \stackrel{\text{def}}{=} m \cdot r^2 \quad [kg \cdot m^2] \quad (5)$$

W przypadku dowolnej bryły sztywnej o masie  $m$ , którą traktujemy jako zbiór nieprzemieszczających się względem siebie objętościowych jej fragmentów (Rys. 2.), moment bezwładności  $I$  względem dowolnej

osi obrotu jest sumą iloczynów mas  $m_i$  poszczególnych jej fragmentów i kwadratów ich odległości  $r_i$  od osi obrotu. Jak nietrudno zauważyć, moment bezwładności jest wielkością addytywną (sumuje się) i dla układu sztywnie połączonych ciał złożony jest z sumy momentów bezwładności poszczególnych jej fragmentów.



**Rys. 2.** Bryła sztywna z wyróżnionym  $i$ -tym jej objętościowym fragmentem o masie  $m_i$ , odległym o  $r_i$  od osi obrotu.

Wobec powyższego, po umownym podziale bryły sztywnej na  $n$  fragmentów, jej moment bezwładności  $I$  wyraża się następująco:

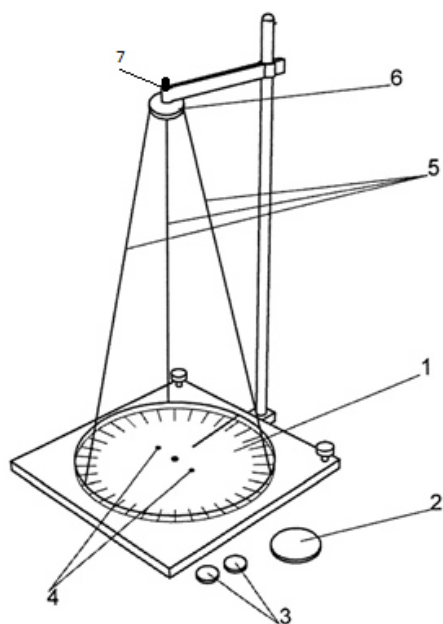
$$I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \dots + m_n \cdot r_n^2 = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 \quad (6)$$

Przy podziale bryły sztywnej na nieskończoną liczbę jednakowych, infinytezymalnych elementów mas  $dm$  (tzn.  $dm \rightarrow 0$ ), jej moment bezwładności wyznacza się metodą analityczną:

$$I = \int_0^m r^2 dm \quad (7)$$

Wyniki analitycznych obliczeń wyrażone wzorami pozwalające obliczać momenty bezwładności brył sztywnych o regularnych kształtach geometrycznych, zamieszone są w tablicach fizycznych. Dowolną oś obrotu bryły sztywnej, która przechodzi przez środek jej masy nazywamy osią środkową.

#### UKŁAD POMIAROWY



**Rys. 3.** Schemat układu pomiarowego.

Schemat układu pomiarowego przedstawiono na Rys. 3. Jego główną częścią jest wykonana z twardego materiału ruchoma tarcza 1 zawieszona na trzech: cienkich, słabo rozciągliwych i o znikomych masach stalowych linkach, których drugie końce są zaczepione do nieruchomej tarczy 6. Układ zawieszenia pozwala tarczy wykonywać drgania skrętne wokół przechodzącej przez środek i prostopadłej do jej powierzchni nieruchomej osi obrotu. W podstawie przyrządu znajduje się podziałka kątowa służąca do obserwacji i oceny wielkości wychyleń układu z położenia równowagi oraz poziomicą do sprawdzenia stanu wyważenia przyrządu przed rozpoczęciem pomiarów.

Ruchomą tarczę 1 układu wprowadza się w drgania przy pomocy uchwyty 7. W tym celu uchwyt należy wyzwoić z gniazda podnosząc go, następnie zdecydowanym ruchem nieznacznie obrócić, i z powrotem osadzić w gnieździe.

W Dodatku zamieszczonym na końcu niniejszej instrukcji znajduje się wyprowadzenie wzoru (8) na moment bezwładności  $I$  układu, zgodnie z którym, zależność okresu  $T$  drgań od momentu bezwładności  $I$  układu złożonego z ruchomej tarczy i umieszczonymi na niej badanymi bryłami sztywnymi jest następująca:

$$I = \frac{m \cdot g \cdot R \cdot S}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi^2 \cdot L} \cdot T^2 \quad (8)$$

w której:  $T$  – okres drgań układu,  
 $m$  – masa układu drgającego,  
 $R$  – odległość od osi obrotu otworu zaczepów nici w tarczy ruchomej,  
 $S$  – względna odległość otworów zaczepów nici w tarczy nieruchomej,  
 $L$  – długość nici,  
 $g$  – wartość przyspieszenia ziemskiego.

Obecne w zależności (8) wielkości  $R$ ,  $S$  i  $L$  mają stałe wartości, gdyż są bezpośrednio związane z indywidualną konstrukcją znajdującego się w laboratorium urządzenia pomiarowego. Dlatego można je (oraz obecną w zależności wartość przyspieszenia ziemskiego  $g$  i stałe matematyczne) zastąpić jedną stałą  $A$  charakteryzującą układ pomiarowy, którą definiujemy następująco:

$$A = \frac{g \cdot R \cdot S}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi^2 \cdot L} \quad \left[ \frac{m^2}{s^2} \right] \quad (9)$$

Uwzględniając definicję nowowprowadzonej stałej  $A$ , zależność (8) przyjmuje postać wyrażenia:

$$I = A \cdot m \cdot T^2 \quad (10)$$

w którym:  $I$  jest momentem bezwładności drgającego układu,  $m$  jest całkowitą masą układu, a  $T$  okresem jego drgań.

Główną zaletą przedstawionego układu pomiarowego jest niezależność możliwości jego użycia do wyznaczania (pomiaru metodą pośrednią) momentów bezwładności brył o zróżnicowanych kształtach względem dowolnej osi obrotu. Należy mieć na uwadze, że każdy wynik otrzymany z zależności (10) zawiera w sobie wartość momentu bezwładności  $I_T$  tarczy ruchomej. Dlatego ważnym jest znajomość dobrze określonej wartości tej wielkości.

#### CEL ĆWICZENIA I METODA BADAŃ

Cel główny ćwiczenia: sprawdzenie addytywności\* momentu bezwładności układu brył sztywnych.

Cele pomocnicze:

- wyznaczenie stałej  $A$  układu pomiarowego,
- wyznaczenie momentu bezwładności ruchomej tarczy układu pomiarowego,
- wyznaczenie momentu bezwładności bryły sztywnej o regularnym kształcie,
- (fakultatywnie) wyznaczenie momentu bezwładności bryły sztywnej o nieregularnym kształcie.

\* wielkość fizyczna opisująca układ fizyczny jest addytywna, jeżeli jej wartość równa jest sumie wielkości każdej z części tego układu. W odniesieniu do momentu bezwładności opisującego układ fizyczny, addytywność tej wielkości dotyczy tylko przypadków, gdy wszystkie części układu wykonują ruch obrotowy względem jednej osi obrotu.

Stanowisko do badań jest wyposażone w zestaw brył sztywnych wykonanych z jednorodnego tworzywa sztucznego, na który składa się zestaw walców o porównywalnych masach i geometrycznych rozmiarach.

Zasadniczą część ćwiczenia dotyczy wykonania serii pomiarów, których wyniki umożliwią ilościową i obiektywną ocenę zmian całkowitego momentu bezwładności układu z tarczą drgającą wywołanych dokładaniem do niego kolejnych walców zestawu.

Gdy na środku ruchomej tarczy układu pomiarowego ustawimy piramidkę utworzoną z  $n$  identycznych walców, to taki układ będzie wykonywał drgania z odpowiednią wartością okresu  $T_n$ . Zgodnie z zależnością (10) moment bezwładności  $I_n$  układu wynosi:

$$I_n = A \cdot m_u \cdot T_n^2$$

gdzie:

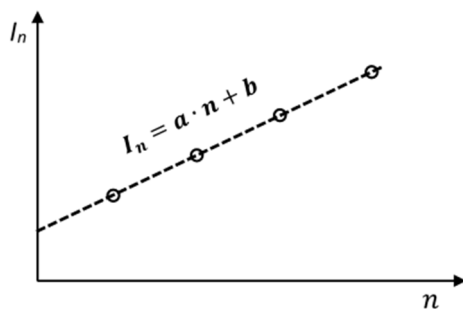
$$m_u = m_T + n \cdot m_K \quad (11)$$

$m_u$  - całkowita masa układu,  $m_T$  - masa ruchomej tarczy,  $n$  - liczba walców, każdy o masie  $m_K$ .

Niezależnie od powyższych rozważań, korzystając z cechy addytywności momentu bezwładności, całkowity moment bezwładności układu jest sumą momentu bezwładności  $I_T$  ruchomej tarczy i całkowitego momentu bezwładności liczby  $n$  walców, każdy o momencie bezwładności  $I_K$ :

$$I_n = n \cdot I_K + I_T \quad (12)$$

Wobec powyższych, należy oczekiwać, że wyznaczona w oparciu o pomiary okresu  $T$  drgań seria wartości momentów bezwładności  $I_n$  układów z różnymi liczbami  $n$  walców utworzy w układzie współrzędnych  $(n; I_n)$  zbiór punktów doświadczalnych z prostoliniowym trendem ich ułożenia, Rys. 4.



**Rys. 4.** Wykres zależności (12). Linia przerywana ukazuje trend ułożenia punktów.

Ogólne równanie widocznej na Rys. 4. linii trendu ma postać:

$$I_n = a \cdot n + b \quad (13)$$

Z porównania zależności (12) i (13) wynikają bezpośrednie związki pomiędzy stałymi równania linii trendu i fizycznymi wielkościami charakteryzującymi drgający układ:

$$\begin{aligned} a &= I_K \\ b &= I_T \end{aligned} \quad (14)$$

Podsumowując powyższe rozważania, należy zauważyć, że prostoliniowy trend ułożenia punktów w doświadczalnie wyznaczonej zależności  $I_n$  od  $n$  potwierdza cechę addytywności momentu bezwładności. Jednocześnie taki wynik stanowi dowód słuszności zasady zachowania energii oraz poprawności opisów kinematycznych i dynamicznych ruchu obrotowego.

Znajomość momentu bezwładności  $I_T$  ruchomej tarczy układu umożliwia wyznaczenie wartości momentu bezwładności  $I_B$  dowolnej bryły sztywnej. W tym celu należy wykonać pomiar masy  $m_B$  badanej bryły, a następnie w układzie z ruchomą tarczą zmierzyć okres  $T_B$  jej drgań. Na podstawie tych danych moment bezwładności  $I_B$  oblicza się w oparciu o wzór:

$$I_B = A \cdot (m_T + m_B) \cdot T_B^2 - I_T \quad (15)$$

## WYKONANIE ĆWICZENIA

### POMIARY WIELKOŚCI STAŁYCH UKŁADU DOŚWIADCZALNEGO

1. Odczepić nici od obu tarcz. Z użyciem liniału zmierzyć długość  $L$  każdej nici (*mieć na uwadze tylko ich ruchome części*). Podczas pomiaru nić powinna być lekko naprężona. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać wartości  $L$  oraz wartość niepewności wzorcowania  $\Delta_d(L)$  użytego liniału i oszacowanej przez eksperymentatora niepewności  $\Delta_e(L)$ .
2. Przygotować specjalną suwmiarkę do pomiaru odległości między środkami otworów. Na tarczy ruchomej zmierzyć względem otworu środkowego odległości  $R$  otworów do mocowania końców nici. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać wartości  $R$  oraz wartość niepewności wzorcowania  $\Delta_d(R)$  użytej suwmiarki. *UWAGA: Do wartości każdego wyniku pomiaru należy dodać 5 mm, ze względu na początkowe i stałe przesunięcie środków kołców suwmiarki.*
3. Przygotować specjalną suwmiarkę do pomiaru odległości między środkami otworów. Na nieruchomej tarczy wybrać do pomiarów trzy otwory, jednakowo odległe od środka w których podczas doświadczenia będą zamocowane końce nici. Tylko dla tych otworów zmierzyć odległości  $S$  między ich środkami. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać wartości  $S$  oraz wartość niepewności wzorcowania  $\Delta_d(S)$  użytej suwmiarki. *UWAGA: Do wartości każdego wyniku pomiaru należy dodać 5 mm, ze względu na początkowe i stałe przesunięcie środków kołców suwmiarki.*
4. Przy użyciu standardowej suwmiarki wykonać po jednym pomiarze średnicy  $\Phi$  każdego z walców zestawu. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać odpowiednio wartości  $\Phi$  oraz wartość niepewności wzorcowania  $\Delta_d(\Phi)$  użytej suwmiarki.
5. Przy użyciu standardowej suwmiarki wykonać serię 5-ciu pomiarów średnicy  $\Phi_D$  większego walca. Pomiarów wykonać chwytając szczękami suwmiarki różne części walca. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać odpowiednio wartości  $\Phi_D$  oraz wartości niepewności wzorcowania  $\Delta_d(\Phi_D)$  użytej suwmiarki.
6. Pojedynczo zważyć każdy z walców zestawu. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać odpowiednio wartości mas  $m$  walców zestawu. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać wartość jej masy  $m$  oraz wartości niepewności wzorcowania  $\Delta_d(m)$  użytej wagi i oszacowanej przez eksperymentatora niepewności  $\Delta_e(m)$ .
6. Wykonać serię 5-ciu pomiarów masy  $m_T$  pustej tarczy. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać wartości mas  $m_T$  oraz wartość niepewności wzorcowania  $\Delta_d(m_T)$  użytej wagi i oszacowanej przez eksperymentatora niepewności  $\Delta_e(m_T)$ .
7. Wykonać serię 5-ciu pomiarów masy  $m_D$  większego walca. W Tabeli Pomiarów 1 zapisać otrzymane wartości mas  $m_D$ . W Tabeli Pomiarów 1 zapisać wartości mas  $m_D$  oraz wartość niepewności wzorcowania  $\Delta_d(m_D)$  użytej wagi i oszacowanej przez eksperymentatora niepewności  $\Delta_e(m_D)$ .
7. Sprawdzić wypoziomowanie układu, a gdy to konieczne – przy pomocy obrotowych nóżek podstawy dokonać korekty. Podwiesić na niciach tarczę obrotową.

## POMIARY CZASÓW DRGAŃ UKŁADU Z WALCAMI

*Przed pomiarami wykonać kilka prób wprawienia układu w drgania. W tym celu należy delikatnie podnieść i uwolnić z jarzma chwytak połączony z nieruchomą tarczą. Następnie należy nim nieznacznie skręcić, po czym z powrotem ostrożnie wprowadzić do jarzma. Czynności te muszą być wykonane w sposób płynny, bez zbędnego pośpiechu, umożliwiając dolnej tarczy ruch obrotowo-zwrotny względem jednej – głównej dla układu - osi obrotu. Gdy zajdzie potrzeba użyć do prób większej liczby krążków na tarczy. WAŻNE: Ruch dolnej tarczy nie może zachodzić ze zbyt dużą amplitudą drgań - kąt maksymalnego jej skręcenia nie powinien przekraczać wartości 15°.*

1. Na środku tarczy obrotowej umieścić pierwszy z walców zestawu (wystający z podstawy walca bolec musi swobodnie wejść w znajdujący się w tarczy otwór).
2. Wprawić w ruch drgający tarczę z pierwszym walcem. Odczekać aż tarcza wykona kilka wahnięć i jej ruch stanie się stabilny. W momencie maksymalnego wychylenia tarczy włączyć stoper i rozpocząć odliczanie cykli drgań. Zmierzyć czas trwania  $n = 30 - 50$  drgań (*Prowadzący zajęcia może narzucić liczbę drgań*). W Tabeli Pomiarów 2 zapisać liczbę  $q$  zliczonych cykli i odpowiadający układowi czas  $t_1$  ich trwania oraz związane z pomiarem bezpośrednim niepewności: wzorcowania  $\Delta_d(t)$  i oszacowaną przez eksperymentatora -  $\Delta_e(t)$ . Dla tego układu wykonać drugi oraz trzeci pomiar czasu drgań, zapisując w tabeli zmierzone wartości.
3. Dołożyć do układu drugi walec (*wykorzystać otwór znajdujący się w górnej części pierwszego walca*). Jak w pkt. 2. wykonać pomiary czasów  $t_2$  wcześniej ustalonej liczby  $q$  drgań.
4. Dokładając na tarczę kolejne walce wykonać dla każdego z układów pomiary czasów liczby  $q$  drgań.
5. Po zakończeniu pomiarów zdjąć walce z tarczy.
4. Umieścić na tarczy większy walec. Wykonać dla tego układu pomiary czasów  $q$  drgań według pkt. 2.

**TABELA POMIARÓW 1**

<i>i</i>	długość nici			odległość otworów zacze­pów nici od osi obrotu - tarcza ruchoma		odległość między otworami zacze­pów nici - tarcza nieruchoma		
	<b>L</b>	<b><math>\Delta_d(L)</math></b>	<b><math>\Delta_e(L)</math></b>	<b>R</b>	<b><math>\Delta_d(R)</math></b>	<b>S</b>	<b><math>\Delta_d(S)</math></b>	
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	
1								
2								
3								
=====								
<b>ŚREDNICA WALCA ZESTAWU</b>								
	<b><math>\Phi_1</math></b>	<b><math>\Phi_2</math></b>	<b><math>\Phi_3</math></b>	<b><math>\Phi_4</math></b>	<b><math>\Phi_5</math></b>	<b><math>\Phi_6</math></b>	<b><math>\Delta_d(\Phi)</math></b>	
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	
<b>MASA WALCA ZESTAWU</b>								
	<b><math>m_1</math></b>	<b><math>m_2</math></b>	<b><math>m_3</math></b>	<b><math>m_4</math></b>	<b><math>m_5</math></b>	<b><math>m_6</math></b>	<b><math>\Delta_d(m)</math></b>	<b><math>\Delta_e(m)</math></b>
	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]
=====								
<b>MASA TARCZY</b>								
	<b><math>m_{T1}</math></b>	<b><math>m_{T2}</math></b>	<b><math>m_{T3}</math></b>	<b><math>m_{T4}</math></b>	<b><math>m_{T5}</math></b>	<b><math>\Delta_d(m_T)</math></b>	<b><math>\Delta_e(m_T)</math></b>	
	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	
=====								
<b>MASA WIĘKSZEGO WALCA</b>								
	<b><math>m_{D1}</math></b>	<b><math>m_{D2}</math></b>	<b><math>m_{D3}</math></b>	<b><math>m_{D4}</math></b>	<b><math>m_{D5}</math></b>	<b><math>\Delta_d(m_D)</math></b>	<b><math>\Delta_e(m_D)</math></b>	
	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	
<b>ŚREDNICA WIĘKSZEGO WALCA</b>								
	<b><math>\Phi_{D1}</math></b>	<b><math>\Phi_{D2}</math></b>	<b><math>\Phi_{D3}</math></b>	<b><math>\Phi_{D4}</math></b>	<b><math>\Phi_{D5}</math></b>	<b><math>\Delta_d(\Phi_D)</math></b>		
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	

**TABELA POMIARÓW 2**

<i>i</i>	liczba drgań układu: $q = \dots\dots\dots$ ( $30 \leq q \leq 50$ )						$\Delta_d(t)$	$\Delta_e(t)$	
	tarcza + n=1 walec	tarcza + n=2 walce	tarcza + n=3 walce	tarcza + n=4 walce	tarcza + n=5 walców	tarcza + n=6 walców			tarcza + większy walec
	$t_1$ [s]	$t_2$ [s]	$t_3$ [s]	$t_4$ [s]	$t_5$ [s]	$t_6$ [s]			$t_D$ [s]
1									
2									
3									



## OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

1. Wykonać przykład obliczenia średniej długości  $L$  nici:

$$L = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{3} \quad (16)$$

2. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ( $k = 2$ ) całkowitej niepewności pomiaru bezpośredniego:  $U(L)$ :

$$U(L) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(L))^2 + (\Delta_e(L))^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^3 (L - L_i)^2}{3 \cdot (3-1)}} \quad (17)$$

3. Wykonać przykład obliczenia średniej odległości  $R$  otworów:

$$R = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3} \quad (18)$$

4. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ( $k = 2$ ) całkowitej niepewności pomiaru bezpośredniego:  $U(R)$ :

$$U(R) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(R))^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^3 (R - R_i)^2}{3 \cdot (3-1)}} \quad (19)$$

5. Wykonać przykład obliczenia średniej odległości  $S$  między mocowaniami nici do nieruchomej tarczy:

$$S = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} \quad (20)$$

6. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ( $k = 2$ ) całkowitej niepewności pomiaru bezpośredniego:  $U(S)$ :

$$U(S) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(S))^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^3 (S - S_i)^2}{3 \cdot (3-1)}} \quad (21)$$

7. Wykonać przykład obliczenia średniej wartości średnicy  $\Phi_K$  charakteryzującej walce zestawu:

$$\Phi_K = \frac{\sum_{i=1}^6 \Phi_i}{6} \quad (22)$$

8. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ( $k = 2$ ) całkowitej niepewności pomiaru bezpośredniego:  $U(\Phi_K)$

$$U(\Phi_K) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(\Phi))^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^6 (\Phi_K - \Phi_i)^2}{6 \cdot (6-1)}} \quad (23)$$

9. Wykonać przykład obliczenia średniej masy  $m_K$  charakteryzującej walce zestawu:

$$m_K = \frac{\sum_{i=1}^6 m_i}{6} \quad (24)$$

10. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ( $k = 2$ ) całkowitej niepewności pomiaru bezpośredniego:  $U(m_K)$ :

$$U(m_K) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(m))^2 + (\Delta_e(m))^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^6 (m_K - m_i)^2}{6 \cdot (6-1)}} \quad (25)$$

11. Wykonać przykład obliczenia średniej średnicy  $\Phi_D$  większego walca:

$$\Phi_D = \frac{\sum_{i=1}^5 \Phi_{D,i}}{5} \quad (26)$$

12. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ( $k = 2$ ) całkowitej niepewności pomiaru bezpośredniego:  $U(\Phi_D)$ :

$$U(\Phi_D) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(\Phi_D))^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^5 (\Phi_D - \Phi_{D,i})^2}{5 \cdot (5-1)}} \quad (27)$$

13. Wykonać przykład obliczenia średniej masy  $m_D$  większego walca:

$$m_D = \frac{\sum_{i=1}^5 m_{D,i}}{5} \quad (28)$$

14. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ( $k=2$ ) całkowitej niepewności pomiaru bezpośredniego:  $U(m_D)$ :

$$U(m_D) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(m_D))^2 + (\Delta_e(m_D))^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^5 (m_D - m_{D,i})^2}{5 \cdot (5-1)}} \quad (29)$$

15. Wykonać przykład obliczenia średniej masy  $m_T$  ruchomej tarczy:

$$m_T = \frac{\sum_{i=1}^5 m_{T,i}}{5} \quad (30)$$

16. Wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ( $k=2$ ) całkowitej niepewności pomiaru bezpośredniego:  $U(m_T)$ :

$$U(m_T) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(m_T))^2 + (\Delta_e(m_T))^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^5 (m_T - m_{T,i})^2}{5 \cdot (5-1)}} \quad (31)$$

17. Wykonać przykład obliczenia wartości stałej  $A$  układu:

$$A = \frac{g \cdot R \cdot S}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi^2 \cdot L} \quad (32)$$

*Do obliczeń użyć wartości stałych  $g$  i  $\pi$  zawierających odpowiednio dużą liczbę cyfr znaczących.*

18. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności  $U(A)$ :

$$U(A) = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial R} U(R)\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial S} U(S)\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial L} U(L)\right)^2} = A \cdot \sqrt{\left(\frac{U(R)}{R}\right)^2 + \left(\frac{U(S)}{S}\right)^2 + \left(\frac{U(L)}{L}\right)^2} \quad (33)$$

19. Wyniki wykonanych obliczeń zapisać w Tabeli Wyników 1.

**TABELA WYNIKÓW 1\***

$L$	$U(L)$	$R$	$U(R)$	$S$	$U(S)$	$m_T$	$U(m_T)$
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[kg]	[kg]
$m_K$	$U(m_K)$	$\Phi_K$	$U(\Phi_K)$	$m_D$	$U(m_D)$	$\Phi_D$	$U(\Phi_D)$
[kg]	[kg]	[m]	[m]	[kg]	[kg]	[m]	[m]
STAŁA UKŁADU							
$A$				$U(A)$		$\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$	

\* wartości wszystkich wielkości należy podać w jednostkach SI. Eliminować w wartościach nadmierne liczby zer nieznaczących, wprowadzając do zapisu ich jednostek stosowne mnożniki – patrz przykład dla  $S$  i  $U(S)$ . Wartość wielkości i jej niepewność muszą być zapisane z użyciem takiej samej jednostki.

20. Dla dowolnego układu z walcami zestawu wykonać przykład obliczenia jego całkowitej masy,  $m_n$ :

$$m_n = m_T + n \cdot m_K \quad (34)$$

21. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności:  $U(m_n)$ :

$$U(m_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial m_n}{\partial m_T} U(m_T)\right)^2 + \left(\frac{\partial m_n}{\partial m_K} U(m_K)\right)^2} = \sqrt{(1 \cdot U(m_T))^2 + (n \cdot U(m_K))^2} = \sqrt{U(m_T)^2 + (n \cdot U(m_K))^2} \quad (35)$$

22. Wykonać przykład obliczenia średniego czasu drgań dla układu  $1 < n < 6$  według ogólnego wzoru:

$$t_n = \frac{t_{n,1} + t_{n,2} + t_{n,3}}{3} \quad (36)$$

23. Wykorzystując dane z poprzedniego przykładu, wykonać przykład oszacowania wartości rozszerzonej ( $k = 2$ ) całkowitej niepewności  $U(t_n)$  według ogólnego wzoru:

$$U(t_n) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(t))^2 + (\Delta_e(t))^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^3 (t_n - t_{n,i})^2}{3 \cdot (3-1)}} \quad (37)$$

24. Wykorzystując dane z poprzedniego przykładu, wykonać przykład obliczenia okresu  $T_n$  jego drgań według ogólnego wzoru:

$$T_n = \frac{t_n}{q} \quad (38)$$

25. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności:  $U(T)$  według ogólnego wzoru:

$$U(T) = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial t} U(t)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{q} U(t)\right)^2} = \frac{U(t)}{q} \quad (39)$$

26. Wykorzystując dane z poprzedniego przykładu, wykonać przykład obliczenia jego momentu bezwładności  $I_n$  według ogólnego wzoru:

$$I_n = A \cdot m_n \cdot T_n^2 \quad (40)$$

27. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności:  $U(I_n)$ :

$$U(I_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial I_n}{\partial A} U(A)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_n}{\partial m_n} U(m_n)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_n}{\partial T_n} U(T_n)\right)^2} = \sqrt{(m_n \cdot T_n^2 \cdot U(A))^2 + (A \cdot T_n^2 \cdot U(m_n))^2 + (2 \cdot A \cdot m_n \cdot T_n \cdot U(T_n))^2} = I_n \cdot \sqrt{\left(\frac{U(A)}{A}\right)^2 + \left(\frac{U(m_n)}{m_n}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot U(T_n)}{T_n}\right)^2} \quad (41)$$

28. Wykonać obliczenia dla pozostałych układów (bez dużego walca), a otrzymane wartości zapisać w Tabeli Wyników 2.

**TABELA WYNIKÓW 2**

$n$	$m_n$ [kg]	$U(m_n)$ [kg]	$t_n$ [s]	$U(t_n)$ [s]	$T_n$ [s]	$U(T_n)$ [s]	$I_n$ [kg · m <sup>2</sup> ]	$U(I_n)$ [kg · m <sup>2</sup> ]
1								
2								
3								
4								
5								
6								

\* wartości wszystkich wielkości należy podać w jednostkach SI. Eliminować w wartościach nadmierne liczby zer nieznaczących, wprowadzając do zapisu ich jednostek stosowne mnożniki – patrz przykład dla S i U(S). Wartość wielkości i jej niepewność muszą być zapisane z użyciem takiej samej jednostki.

29. Wykonać wykres zależności momentu bezwładności  $I_n$  układu z drgającą tarczą od liczby  $n$  umieszczonych na niej walców. Do ułożeń punktów doświadczalnych poprowadzić przerywaną kreską linię trendu. Otrzymanie prostoliniowego układu punktów doświadczalnym jest bardzo ważnym wynikiem, co należy stosownie odnotować we wnioskach, posiłkując się informacjami zawartymi na str. 4.

30. Z użyciem funkcji REGLINP (arkusz Excel) wyznaczyć wartości parametrów  $a$  i  $b$  (również  $u(a)$ ,  $u(b)$ ,  $R^2$ ) równania prostej o ogólnym równaniu  $I_n = a \cdot n + b$ , będącej najlepszym dopasowaniem do trendu ułożeń punktów doświadczalnych. Wartości wyznaczonych parametrów zapisać w Tabeli Wyników 3.

31. Tabela Wyników 3.

**TABELA WYNIKÓW 3**

parametry równania prostej	nachylenie		odcięta		miara jakości dopasowania
	$a$	$u(a)$	$b$	$u(b)$	$R^2$
	$[kg \cdot m^2]$	$[kg \cdot m^2]$	$[kg \cdot m^2]$	$[kg \cdot m^2]$	$[-]$
przed zaokrągleniem					
po zaokrągleniu					

32. Zapisać wartości wyznaczonych momentów bezwładności tarczy oraz pojedynczego (statystycznie „uśrednionego”) walca zestawu, wraz z niepewnościami ich wyznaczenia:

$$\begin{aligned} I_T &= b & U(I_T) &= u(b) \\ I_K &= a & U(I_K) &= u(a) \end{aligned} \quad (42)$$

33. Wykonać przykład obliczenia całkowitej masy  $m_{u,D}$  układu z większym walcem:

$$m_{u,D} = m_T + m_D \quad (43)$$

34. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności:  $U(m_{u,D})$ :

$$U(m_{u,D}) = \sqrt{\left(\frac{\partial m_{u,D}}{\partial m_T} U(m_T)\right)^2 + \left(\frac{\partial m_{u,D}}{\partial m_D} U(m_D)\right)^2} = \sqrt{(1 \cdot U(m_T))^2 + (U(m_D))^2} = \sqrt{(U(m_T))^2 + (U(m_D))^2} \quad (44)$$

35. Według pkt. 23-26 wykonać obliczenia średniego czasu drgań  $t_D$  i okresu drgań  $T_D$  oraz niepewności  $U(t_D)$  i  $U(T_D)$  dla układu z większym walcem.

36. Wykonać przykład obliczenia wartości momentu bezwładności  $I_D$  krążka większego:

$$I_D = A \cdot m_{u,D} \cdot T_D^2 - I_T \quad (45)$$

37. Korzystając ze znajomości wartości wcześniej wyznaczonych wielkości wykonać przykład oszacowania niepewności  $U(I_D)$ :

$$U(I_D) = \sqrt{\left(\frac{\partial I_D}{\partial A} U(A)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_D}{\partial m_{u,D}} U(m_{u,D})\right)^2 + \left(\frac{\partial I_D}{\partial T_D} U(T_D)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_D}{\partial I_T} U(I_T)\right)^2} = \sqrt{(m_{u,D} \cdot T_D^2 \cdot U(A))^2 + (A \cdot T_D^2 \cdot U(m_{u,D}))^2 + (2 \cdot A \cdot m_{u,D} \cdot T_D \cdot U(T_D))^2 + (-1 \cdot U(I_T))^2} = (46)$$

$$(I_D + I_T) \cdot \sqrt{\left(\frac{U(A)}{A}\right)^2 + \left(\frac{U(m_{u,D})}{m_{u,D}}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{U(T_D)}{T_D}\right)^2 + \left(\frac{U(I_T)}{I_D + I_T}\right)^2}$$

38. Otrzymanymi wartościami uzupełnić Tabelę Wyników 4.

**TABELA WYNIKÓW 4**

$m_{u,D}$	$U(m_{u,D})$	$t_D$	$U(t_D)$	$T_D$	$U(T_D)$	$I_D$	$U(I_D)$
$[kg]$	$[kg]$	$[s]$	$[s]$	$[s]$	$[s]$	$[kg \cdot m^2]$	$[kg \cdot m^2]$

**PORÓWNANIE DOŚWIADCZALNIE WYZNACZONYCH WARTOŚCI MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI  
BADANYCH WALCÓW Z WARTOŚCIAMI WYZNACZONYMI METODĄ ANALITYCZNĄ.**

Wyprowadzony na drodze rozważań analitycznych moment bezwładności  $I$  dowolnego walca względem głównej osi obrotu (przechodzącej przez środek jego masy i prostopadłej do podstawy), wyraża się wzorem:

$$I = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \quad (47)$$

$m$  - masa walca,  $r$  – promień podstawy.

39. Korzystając ze wzoru analitycznego wykonać przykład obliczenia wartości momentu bezwładności  $I_K$  krążka zestawu:

$$I_{K,a} = \frac{1}{2} m_K \cdot r_K^2 = \frac{1}{8} m_K \cdot \Phi_K^2 \quad (48)$$

40. Wykonać przykład oszacowania niepewności  $U(I_{K,a})$ :

$$U(I_{K,a}) = \sqrt{\left(\frac{\partial I_{K,a}}{\partial m_K} U(m_K)\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{K,a}}{\partial \Phi_K} U(\Phi_K)\right)^2} = I_{K,a} \cdot \sqrt{\left(\frac{U(m_K)}{m_K}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{U(\Phi_K)}{\Phi_K}\right)^2} \quad (49)$$

41. Wykonać przykład obliczenia na podstawie wzoru analitycznego wartości momentu bezwładności  $I_{D,a}$  większego walca:

$$I_{D,a} = \frac{1}{8} m_D \cdot \Phi_D^2 \quad (50)$$

42. Wykonać przykład oszacowania niepewności  $U(I_{D,a})$ :

$$U(I_{D,a}) = I_{D,a} \cdot \sqrt{\left(\frac{U(m_D)}{m_D}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{U(\Phi_D)}{\Phi_D}\right)^2} \quad (51)$$

**WNIOSKI**

W pierwszej części wniosków zamieścić Tabelę Stałych Układu Pomiarowego. Ocenić dokładność wyznaczenia stałych układu.

**STAŁE UKŁADU POMIAROWEGO**

<b>A</b>	<b>U(A)</b>	<b><math>m_T</math></b>	<b>U(<math>m_T</math>)</b>	<b><math>I_T</math></b>	<b>U(<math>I_T</math>)</b>
$\frac{m^2}{s^2}$	$\frac{m^2}{s^2}$	[kg]	[kg]	[kg · m <sup>2</sup> ]	[kg · m <sup>2</sup> ]

Zastosować mnożniki w jednostkach eliminując nadmierną liczbę zer nieznaczących. Jednostka wielkości i jej niepewność muszą być zapisane z użyciem identycznego mnożnika.

W drugiej części wniosków omówić otrzymane wyniki końcowe, które należy zamieścić w tabeli.

<b>MOMENT BEZWŁADNOŚCI / BRYŁY SZTYWNEJ WZGLĘDEM GŁÓWNEJ OSI JEJ OBROTU</b>				
<b>SPOSÓB WYZNACZENIA WARTOŚCI</b>	<b>walec zestawu</b>		<b>większy walec</b>	
	<b><math>I_K</math></b>	<b>U(<math>I_K</math>)</b>	<b><math>I_D</math></b>	<b>U(<math>I_D</math>)</b>
	[kg · m <sup>2</sup> ]	[kg · m <sup>2</sup> ]	[kg · m <sup>2</sup> ]	[kg · m <sup>2</sup> ]
<b>doświadczalny,</b> w układzie z drgającą tarczą				
<b>analityczny,</b> $\frac{1}{2} m r^2$				

Zastosować mnożniki w jednostkach eliminując nadmierną liczbę zer nieznaczących. Jednostka wielkości i jej niepewność muszą być zapisane z użyciem identycznego mnożnika.

Dla każdego z walców porównać wyniki uzyskane przy użyciu różnych metod oraz w oparciu o ocenę zbieżności zakresów ich wartości z uwzględnieniem niepewności ich wyznaczenia.

## Literatura

- [1] HALLIDAY D., RESNICK R., WALKER J.: Podstawy fizyki t.2, PWN, Warszawa, 2005.  
[2] SZYDŁOWSKI H.: Pracownia fizyczna, PWN, 1989.  
[3] Ćwiczenia Laboratoryjne z Fizyki (praca zbiorowa), Skrypt Nr 279, Politechnika Opolska 2007.

## DODATEK

### WYPROWADZENIE WZORU NA OKRES T DRGAŃ SKRĘTNYCH TARCZY UKŁADU POMIAROWEGO

Drgania harmoniczne proste wykonywane przez dowolny układ są skutkiem działającej na niego siły sprężystej  $F$ , o której wiadomo, że ma wartość proporcjonalną do wielkości wychylenia  $x$  układu z położenia równowagi, natomiast zwrot jej wektora stale jest skierowany do punktu równowagi układu.

$$F = -k \cdot x \quad (8)$$

Obecna w równaniu stała proporcjonalności  $k$ , to współczynnik sprężystości układu, natomiast znak „-” informuje o przeciwnym do wektora wychylenia  $x$  zwrocie siły  $F$  (ciągłe wskazywanie punktu równowagi przez wektor siły).

Dla skręcających odkształceń sprężystych pomiędzy wielkością odkształcenia  $\alpha$  (kątem skręcenia) a momentem siły  $M$  odpowiedzialnej za ten efekt zachodzi prosta proporcjonalność:

$$M = -D \cdot \alpha \quad (9)$$

w której :  $M$  – odpowiedzialny za odkształcenie skrętne moment siły,  
 $\alpha$  – kąt skręcenia (wychylenie kątowe),  $[\alpha] = rad$

$D$  - moment kierujący (współczynnik sprężystości ciała na odkształcenia skrętne),  $[D] = \frac{N \cdot m}{rad}$

Korzystając z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego zapisujemy związek między momentem siły  $M$ , momentem bezwładności  $I$  bryły sztywnej oraz jej przyspieszeniem kątowym  $\varepsilon$ :

$$I \cdot \varepsilon = M, \quad \text{przy czym: } \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \quad (10)$$

Gdy działający na bryłę sztywną niezrównoważony moment siły  $M$  powodowany jest wypadkową siłą o cechach siły sprężystości, to równanie (10) z uwzględnieniem (9), przyjmuje postać:

$$I \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = -D \cdot \alpha \quad (11)$$

Wprowadzając do (11) stałą  $\omega_0$  zdefiniowaną poniżej:

$$\omega_0^2 = \frac{D}{I} \quad (12)$$

sprowadzamy równanie (11) do postaci:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \omega_0^2 \cdot \alpha = 0 \quad (13)$$

Z analitycznego punktu widzenia (13) jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu, mającym dwa alternatywne rozwiązania w postaci zależnych od czasu  $t$  funkcji  $\alpha(t)$  oraz pewnych stałych:  $\alpha_0, \omega_0$  i  $\theta$ :

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \theta) \quad (14)$$

lub

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \theta) \quad (15)$$

Rozwiązania równania (13), to okresowe w czasie funkcje o identycznym charakterze zmian wartości, co wynika z podobieństwa właściwości trygonometrycznych funkcji sinus i kosinus. Ogólna stała  $\theta$  obecna w rozwiązaniach (14) i (15) nosi nazwę fazy początkowej ruchu, a jej wartość zależy od sposobu rozpoczęcia drgań. Na potrzeby dalszych rozważań wartość jej przyjmuje się równą zero. Również do

dalszych analiz przyjmuje się jako rozwiązanie równania ruchu (13) tylko funkcję opisaną równaniem (15). Wobec powyższego:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \quad (16)$$

Zgodnie z funkcją (15) chwilowe wychylenia z położenia równowagi opisują ograniczony w przestrzeni ruch bryły sztywnej, czyli drgania, będące przykładem ruchu okresowego (cyklicznego). Maksymalne wartości wychyleń:  $+\alpha_0$  lub  $-\alpha_0$ , nazywamy amplitudą drgań, którą układ osiąga w momentach czasowych, gdy funkcja sinus przyjmuje wartość +1 lub -1. Okres drgań  $T$ , to czas potrzebny na wykonanie jednego cyklu ruchu drgającego, jednocześnie jest to czas w którym argument funkcji sinus w (16) zmieni wartość o  $2\pi$ :

$$\omega_0 \cdot T = 2 \cdot \pi \quad (17)$$

Wobec tego między stałą  $\omega_0$  i okresem drgań  $T$  istnieje związek:

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad (18)$$

Stałą  $\omega_0$  nazywamy częstością kołową drgań własnych lub pulsacją. Jej wymiarem jest  $\left[\frac{rad}{s}\right]$

Z porównania (12) z (18) wynika, że dla danego układu okres  $T$  drgań jest niezmienny, a jego wartość uwarunkowana jest właściwościami sprężysto-inercyjnymi układu. Okres  $T$  spełnia ogólną zależność:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (19)$$

Gdy układ jest zdolny do obrotów bryłą sztywną, to pod działaniem skręcającego momentu  $M$  siły (sprężystości), wykonuje okresowy ruch obrotowo-zwrotny. Charakter tego ruchu posiada wszystkie cechy drgań składających się z identycznych cykli, powtarzających się z okresem  $T$ , w których tarcza doznaje odchylenia (skręceń, torsji) kątowych, nawrotów i przejść przez położenie równowagi. Przy założeniu braku sił oporu ośrodka, układ traktujemy jako izolowany (nie tracący energii całkowitej), wobec tego jego drgania są swobodne.

Z zasady zachowania energii wynika, że w każdej chwili całkowita energia mechaniczna układu izolowanego ma identyczną (niezmienną) wartość. W rozważanym układzie całkowita energia  $E$  jest sumą:

$$E = E_o + E_p \quad (20)$$

gdzie:  $E_o$  – zależna od czasu chwilowa wartość energii ruchu obrotowego tarczy,

$E_p$  – zależna od czasu chwilowa wartość energii potencjalna tarczy w ziemskim polu grawitacyjnym (z każdym wychyleniem tarczy z położenia równowagi związane jest jej uniesienie się ponad poziom odpowiadający stanowi spoczynku).

W ruchu układu występują szczególne momenty czasowe, gdy wartość całkowitej energii  $E$  układu równa jest tylko maksymalnej wartości jednej z jej składowych ( $E_{o,max}$  lub  $E_{p,max}$ ). W chwili gdy układ osiągnie wychylenie równe amplitudzie drgań, prędkość jego ruchu równa jest zero ( $E_o = 0$ ), a wzniesienie tarczy ponad poziom spoczynkowy przyjmuje wartość maksymalną,  $h_{max}$ . W innych momencie, gdy drgająca tarcza mija położenie równowagi, wzniesienie jej ponad poziom spoczynkowy równe jest zero ( $E_p = 0$ ), a prędkość kątowa jej ruchu ma wartość maksymalną,  $\omega_{max}$ . Zatem można stwierdzić, że zgodnie z zasadą zachowania energii prawdziwą jest równość wartości maksymalnych: grawitacyjnej energii potencjalnej wzniesienia tarczy i energii jej ruchu obrotowego:

$$m \cdot g \cdot h_{max} = \frac{I \cdot \omega_{max}^2}{2} \quad (21)$$

W zależności (21) symbolem  $m$  oznaczono całkowitą masę układu, natomiast symbolem  $I$  – całkowity moment jego bezwładności. Należy zaznaczyć, że termin „całkowity” uwzględnia sytuacje, w których tarcza może być pusta lub dodatkowo obciążona badanymi bryłami sztywnymi.

Mając na uwadze (16) i (18), funkcję chwilowej wartości wychylenia  $\alpha$  tarczy z położenia równowagi możemy zapisać wzorem:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad (22)$$

Natomiast jej chwilowa prędkość kątowna  $\omega$  wynosi:

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{2\pi}{T} \cdot \alpha_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad (23)$$

Tarcza osiąga maksymalną wartość prędkości kątowej,  $\omega_{max}$ , w momentach czasu  $t = 0, \frac{1}{2}T, T, \frac{3}{2}T \dots$

Wtedy w zależności (24) czynnik  $\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = 1$ , i stąd:

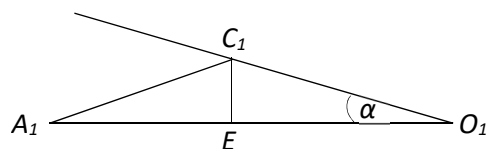
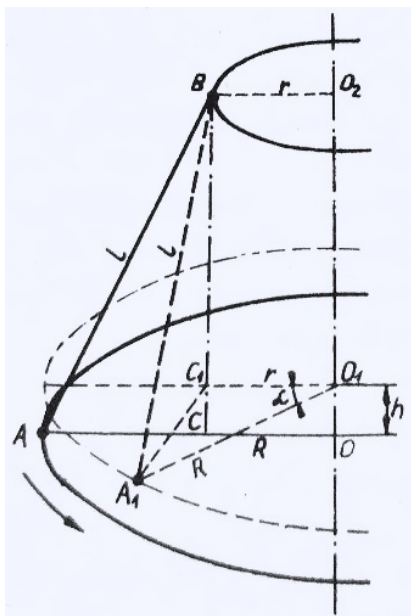
$$\omega_{max} = \frac{2\pi}{T} \cdot \alpha_0 \quad (24)$$

Po uwzględnieniu (24) w równaniu (22), otrzymuje się:

$$m \cdot g \cdot h_{max} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot I \cdot \alpha_0^2}{T^2} \quad (25)$$

W laboratoryjnych warunkach bezpośrednio pomiary wartości  $h_{max}$  lub  $\alpha_0$  nie należą do najprostszych. Bez specjalnego wyposażenia stanowiska jakość uzyskanych wyników pomiarów może być niezadowolająca dla eksperymentatora. Dlatego w dalszej części przedstawiona zostanie dodatkowa analiza obecnych w układzie, i jeszcze nie omówionych, współzależności go cechujących.

Poniżej zostanie wykazane,  $h_{max}$  oraz  $\alpha_0$  można zastąpić zależnościami zawierającymi łatwiej mierzalne wielkości charakteryzujące układ doświadczalny.



Oznaczenia na schematach:

- $O, O_2$  – punkty środków geometrycznych odpowiednio: tarczy obrotowej i górnego nieruchomego krążka. Punkty leżą na osi obrotu tarczy.
- $A, B$  – punkt zaczepienia końca nici,
- $C$  – rzut pionowy punktu  $B$  na powierzchnię tarczy,
- $A_1, C_1$  – nowe położenia punktów  $A$  i  $C$  po wychyleniu (skręceniu) tarczy o kąt  $\alpha$ ,
- $E$  – punkt pomocniczy,
- $\alpha$  – kąt wychylenia tarczy z położenia równowagi,
- $r$  – odległość zaczepu końca nici od osi obrotu,
- $R$  – odległość zaczepu końca nici od osi obrotu,
- $L$  – długość nici,
- $h$  – wysokość wzniesienia tarczy odpowiadająca jej wychyleniu o  $\alpha$ .

**Rys. 1.** Schematy do wyznaczenia zależności na wielkość  $h$  wzniesienia tarczy.

Z właściwości geometrycznych układu, którego schemat przedstawiono na Rys. 1., wynika, że po odchyleniu tarczy z położenia równowagi wysokość  $h$  jej wzniesienia można wyrazić długościami odcinków  $BC$  i  $BC_1$ :

$$h = BC - BC_1 \quad (26)$$

Dokonując tożsamościowego przekształcenia powyższej zależności:

$$h = (BC - BC_1) \frac{BC + BC_1}{BC + BC_1} = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1} \quad (27)$$

otrzymuje się:

$$h = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1} \quad (28)$$

Długości boków trójkąta prostokątnego  $ABC$  spełniają twierdzenie Pitagorasa:

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 \quad (29)$$



a po uwzględnieniu fizycznych parametrów układu, można je wyrazić poprzez:

$$(BC)^2 = L^2 - (R - r)^2 \quad (30)$$

Z kolei dla długości boków trójkąta prostokątnego  $A_1BC_1$  zachodzi zależność:

$$(BC_1)^2 = (A_1B)^2 - (A_1C_1)^2 \quad (31)$$

Warto zauważyć, że bok  $A_1C_1$  to jednocześnie: przeciwprostokątna trójkąta  $A_1C_1E$ , w którym długość boku  $A_1E$  wynosi:

$$A_1E = R - r \cdot \cos(\alpha) \quad (32)$$

i przyprostokątna trójkąta  $C_1EO_1$ , z boki  $C_1E$  o długości:

$$C_1E = r \cdot \sin(\alpha) \quad (33)$$

Korzystając z zależności (32) i (33) i twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $A_1C_1E$ , kwadrat jego przeciwprostokątnej  $A_1C_1$ :

$$(A_1C_1)^2 = (A_1E)^2 + (C_1E)^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha) \quad (34)$$

Uwzględniając wynik (34) oraz wiedząc, że długość  $A_1B = L$ , wyrażenie (31) przyjmuje postać:

$$(BC_1)^2 = L^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha)) \quad (35)$$

Podstawiając (30) (35) do (28) otrzymujemy wzór:

$$h = \frac{L^2 - (R-r)^2 - L^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha)}{BC + BC_1} \quad (36)$$

który po uproszczeniu wyrażenia w liczniku, przyjmuje postać:

$$h = \frac{2 \cdot R \cdot r \cdot (1 - \cos(\alpha))}{BC + BC_1} \quad (37)$$

Zakładając, że drgania tarczy będą odbywać się z niewielkimi wartościami amplitudy, co również oznacza małe kąty jej wychyleń z położenia równowagi, dla niektórych z obecnych w (37) fragmentów wyrażeń można dokonać przybliżeń:

$$1 - \cos(\alpha) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx \frac{1}{2} \alpha^2 \quad (38)$$

$$BC \approx BC_1 \approx L \quad (39)$$

Po podstawieniu (38) i (39) do (37), a następnie dokonaniu niezbędnych uproszczeń otrzymanego wyrażenia, amplituda wychYLENIA tarczy  $\alpha = \alpha_0$  i maksymalne jej wzniesienie  $h = h_{max}$  przyjmują relację:

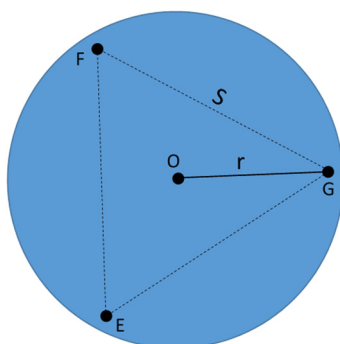
$$h_{max} = \frac{R \cdot r \cdot \alpha_0^2}{2 \cdot L} \quad (40)$$

Po wstawieniu do wcześniej wyprowadzonego wzoru (25) otrzymanej zależności (40) zostaje zrealizowany cel, którego wynikiem jest zastąpienie w (25) kłopotliwych do pomiaru wielkości ( $h_{max}$  i  $\alpha_0$ ), łatwiej mierzalnymi wielkościami  $R$ ,  $r$  oraz  $L$ .

$$m \cdot g \cdot \frac{R \cdot r \cdot \alpha_0^2}{2 \cdot L} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot I \cdot \alpha_0^2}{T^2} \quad (41)$$

Przekształcenie (41) skutkuje otrzymaniem nowej zależności (42), stanowiącej podstawę metody pośredniego pomiaru momentu bezwładności  $I$  układu drgającego (tarczy pustej lub obciążonej walcami, lub innymi bryłami sztywnymi):

$$I = \frac{m \cdot g \cdot R \cdot r}{4 \cdot \pi^2 \cdot L} \cdot T^2 \quad (42)$$



**Rys. 2.** Układ położeń na nieruchomej tarczy otworów E, F, G służących do mocowania zawiesi nici. Przez punkt O przechodzi oś obrotu układu, prostopadła do powierzchni tarczy. Analogiczny układ dotyczy tarczy ruchomej, w której charakterystyczne odległości oznaczono symbolami K oraz R. Wyjaśnienie oznaczeń w tekście.

Wykonane w tarczy nieruchomej otwory do mocowań końców nici (Rys. 2.) znajdują się w takich wzajemnych odległościach, że ich położenia E, F, G można traktować jak wierzchołki trójkąta równobocznego. Przyjmując, że odległość między środkami tych otworów wynosi S oraz korzystając z geometrycznych właściwości trójkąta równobocznego, r wyraża się następująco:

$$r = \frac{S}{\sqrt{3}} \quad (43)$$

Uwzględnienie wyrażenia (43) we wzorze (42) prowadzi do końcowej zależności momentu bezwładności I układu od okresu T jego drgań :

$$I = \frac{m \cdot g \cdot R \cdot S}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi^2 \cdot L} \cdot T^2 \quad (44)$$

gdzie:

- m* – całkowita masa układu drgającego,
- g* – wartość przyspieszenia ziemskiego,
- R* – odległość na tarczy ruchomej środków otworów dla zaczepów nici od osi obrotu,
- S* – odległość na tarczy nieruchomej między środkami otworów dla zaczepów nici,
- L* – długość nici,
- T* – okres drgań układu.