
 POLITECHNIKA OPOLSKA	KATEDRA FIZYKI	
	LABORATORIUM FIZYKI	
WYZNACZANIE STOSUNKU C_p/C_v DLA POWIETRZA METODĄ CLEMENTA - DESORMESA		

WSTĘP

Stan ciała lotnego (gazu) posiadającego sprężystość objętości, określamy podając cztery jego parametry: objętość V , temperaturę T , masę M i ciśnienie p . Jeżeli masa gazu jest stała, zmiana jednego z parametrów powoduje zmianę pozostałych (a przynajmniej jednego z nich). Wnioskujemy stąd, że parametry określające stan gazu są ze sobą w ścisły sposób powiązane. Związek ten podaje tzw. równanie stanu gazu doskonałego.

Gazem doskonałym nazywamy gaz składający się z cząsteczek nie posiadających objętości własnej (punkty materialne). W takim gazie nie działają siły spójności między cząsteczkami. Przy niskich ciśnieniach wymiary cząsteczek gazów rzeczywistych są o wiele mniejsze od średniej odległości pomiędzy cząsteczkami, co pozwala w pierwszym przybliżeniu traktować te cząsteczki jak punkty materialne. Z uwagi na duże odległości międzycząsteczkowe siły spójności są bardzo małe i można je zaniedbać. Tak więc przy niskich ciśnieniach gazy rzeczywiste będą zachowywały się w sposób podobny jak modelowy gaz idealny. Jednakże przy wysokich ciśnieniach gazy rzeczywiste nie będą spełniały warunków nałożonych na gazy idealne.

Równanie stanu gazu doskonałego możemy wyprowadzić w oparciu o kinetyczną teorię gazów. Załóżmy, że gaz zamknięty jest w sześciennym naczyniu o długości krawędzi ścianki l . Zgodnie z definicją gazu doskonałego cząsteczki gazu nie oddziałują z sobą. Każda z cząsteczek porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, dopóki nie zderzy się ze ścianką naczynia. Podczas zderzenia energia kinetyczna cząsteczki nie ulega zmianie, zmienia się natomiast jej pęd (zderzenie sprężyste)

$$\Delta p_0 = 2m \cdot v$$

gdzie: Δp_0 – zmiana pędu,
 m – masa cząsteczki,
 v – średnia prędkość ruchu cząsteczki.

Z uwagi na dużą liczbę cząstek gazu w naczyniu, żaden kierunek ruchu cząsteczek nie jest wyróżniony, możemy więc przyjąć, że między każdą parą przeciwległych ścian naczynia porusza się 1/3 całkowitej liczby cząsteczek zamkniętych w naczyniu. Dowolna cząsteczka uderza w dowolną ściankę w równych odstępach czasu t :

$$t = \frac{2l}{v}$$

W czasie t 1/3 z całkowitej liczby N cząsteczek gazu dozna (na obu ściankach) całkowitej zmiany pędu równej:

$$\Delta p_2 = \frac{4}{3} N \cdot m \cdot v$$

Zmiana pędu na jednej ściance będzie wynosiła

$$\Delta p_1 = \frac{2}{3} N \cdot m \cdot v$$

Siłę F , z jaką cząsteczki gazu działają na pojedynczą ściankę, wyznaczyć można korzystając z drugiej zasady dynamiki:

$$\Delta p_1 = F \cdot t$$

$$F \cdot \frac{2l}{v} = \frac{2}{3} N \cdot m \cdot v$$

Dzieląc ostatnią zależność przez objętość naczynia $V = l^3$, oraz wykonując proste przekształcenia otrzymamy:

$$p = \frac{F}{l^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{N \cdot m \cdot v^2}{V}$$
$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot E_k$$

gdzie: p – ciśnienie gazu w naczyniu,
 V – objętość zajmowana przez gaz,
 E_k – średnia energia kinetyczna cząsteczki gazu, $E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$.

Z definicji temperatury bezwzględnej wiadomo, że jest to wielkość wprost proporcjonalna do średniej energii kinetycznej cząsteczek

$$E_k = A \cdot T$$

gdzie: A – stała zależna od doboru jednostek,
 T – temperatura w skali Kelvina.

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{2}{3} \cdot N \cdot A$$

Ponieważ prawa strona tego równania jest (przy ustalonej masie gazu) stałą, więc możemy je przepisać w postaci:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const}$$

Powyższe równanie nosi nazwę równania stanu gazu doskonałego. Z równania tego wynika, że wyrażenie pV/T ma wartość stałą dla niezmienniej masy gazu.

Obliczmy wartość wyrażenia pV/T dla jednego mola gazu w warunkach normalnych ($p_0 = 101325 \text{ N/m}^2$, $T_0 = 273,16 \text{ K}$, $V_0 = 0,0224 \text{ m}^3$)

$$\frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = R$$

Wartość $R = 6,31446261815324 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$ to uniwersalna stała gazowa.

Równanie stanu gazu doskonałego dla 1 mola gazu:

$$p \cdot V = R \cdot T$$

Dla n moli gazu równanie stanu gazu doskonałego będzie miało postać:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

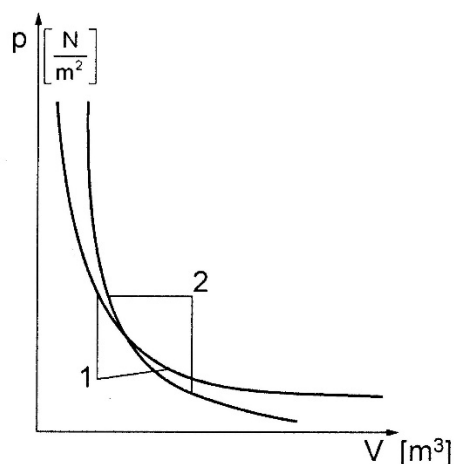
Z równania stanu gazu doskonałego bezpośrednio wynikają odkryte doświadczalnie prawa przemian: izotermicznej, izobarycznej i izochorycznej.

Przemiana izotermiczna.

Opisuje ją prawo Boyle'a-Mariotte'a (dla $M = \text{const}$ i $T = \text{const}$).

$$p \cdot V = \text{const}$$

W czasie izotermicznej przemiany stałej masy gazu ciśnienie wywierane przez gaz na ścianki naczynia jest odwrotnie proporcjonalne do objętości zajmowanej przez gaz.



Rys. 1. Wykres izotermy (1) i adiabaty (2)

Przemiana izobaryczna

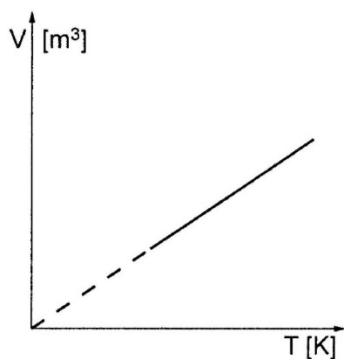
Opisuje ją prawo Gay-Lussaca (dla $M = \text{const}$ i $p = \text{const}$)

$$V = \frac{V_1}{T_1} \cdot T$$

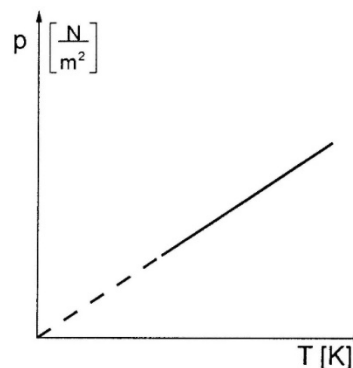
$$V = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

gdzie $\alpha = \frac{1}{273,16 \text{ K}}$

Podczas przemiany izobarycznej stałej masy gazu, jego objętość jest wprost proporcjonalna do temperatury w skali Kelvina.



Rys. 2. Wykres przemiany izobarycznej.



Rys. 3. Wykres przemiany izochorycznej.

Przemiana izochoryczna.

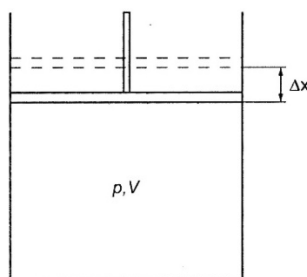
Opisuje ją prawo Charlesa (dla $M = \text{const}$ i $V = \text{const}$).

$$p = \frac{p_1}{T_1} \cdot T$$

$$p = p_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

gdzie $\alpha = \frac{1}{273,16 \text{ K}}$

W przemianie izochorycznej stałej masy gazu ciśnienie gazu jest wprost proporcjonalne do jego temperatury bezwzględnej.



Rys. 4. Schemat naczynia zamkniętego ruchomym tłokiem.

Obliczmy pracę ΔW , jaką wykonuje gaz w czasie rozprężenia (zwiększania objętości). Niech w naczyniu z tłokiem (Rys. 4.) o polu powierzchni S znajduje się gaz o masie M pod ciśnieniem p . Gaz zajmuje całą objętość V naczynia zamkniętą tłokiem. Jeżeli gaz zwiększy swoją objętość np. wskutek podgrzania, to tłok przesunie się o odcinek Δx . Praca wykonana przez gaz będzie równa iloczynowi siły F , przeciwko której wykonano pracę (siła nacisku sił zewnętrznych na tłok) i odcinka Δx :

$$\Delta W = F \cdot \Delta x$$

$$F = p \cdot S$$

$$\Delta W = p \cdot S \cdot \Delta x$$

$$\Delta W = p \cdot \Delta V$$

Jest to praca, jaką wykonuje gaz przeciwko siłom zewnętrznym.

Jedną z wielkości fizycznych stosowanych przy opisie własności termodynamicznych ciał stałych, cieczy i gazów jest ciepło właściwe, czyli ciepło potrzebne do ogrzania jednostki masy danej substancji o jeden stopień skali temperatury. W przypadku gazów najwygodniej jest posługiwać się tzw. ciepłem właściwym molowym. Jest to ilość ciepła potrzebna do ogrzania 1 mola danej substancji o 1 Kelwin. Ciepło właściwe danego gazu zależy od warunków w jakich odbywa się zmiana temperatury gazu. W czasie izobarycznego ogrzewania gazu otrzymujemy tzw. ciepło molowe przy stałym ciśnieniu C_p , którego wartość różni się od ciepła molowego C_V wyznaczonego podczas izochorycznego ogrzewania gazu. Różnica wartości C_p i C_V wynika z I zasady termodynamiki:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

gdzie: ΔQ – ciepło pobrane przez gaz,
 ΔU – zmiana energii wewnętrznej gazu,
 ΔW – praca gazu.

W czasie ogrzewania izochorycznego gaz nie wykonuje pracy ($\Delta W = 0$, ponieważ $V = \text{const}$ i $\Delta V = 0$). W czasie ogrzewania izobarycznego gaz wykonuje pracę przeciwko siłom zewnętrznym. Aby w tych warunkach ogrzać tę samą masę gazu o 1 K, musimy mu dostarczyć większej ilości ciepła (część ciepła zamieni się na pracę) niż w czasie ogrzewania izochorycznego i dlatego $C_p > C_V$. Różnica wartości C_p i C_V jest dla wszystkich gazów jednakowa i wynosi:

$$C_p - C_V = R$$

Z praktycznego punktu widzenia bardzo ważną przemianą gazów jest przemiana adiabatyczna. Zachodzi ona wówczas, kiedy poddany przemianie gaz nie wymienia ciepła z otoczeniem ($\Delta Q = 0$). W tym przypadku:

$$\Delta U = -\Delta W$$

$$C_V \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V = 0$$

$$p = \frac{R \cdot T}{V}$$

$$C_V \cdot \Delta T + \frac{R \cdot T}{V} \cdot \Delta V = 0$$

Z kolei dzieląc stronami ostatnie równanie przez T otrzymamy:

$$C_V \cdot \frac{\Delta T}{T} + R \cdot \frac{\Delta V}{V} = 0$$

przechodząc od przyrostów ΔV i ΔT do różniczek dT i dV oraz całkując ostatnie równanie otrzymamy:

$$C_V \cdot \ln T + R \cdot \ln V = \text{const}$$

Ponieważ jednak $C_p - C_V = R$, więc

$$T^{C_V} \cdot V^{C_p - C_V} = \text{const}$$

$$T \cdot V^{\frac{C_p - C_V}{C_V}} = \text{const}$$

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V}$$

$$T \cdot V^{\kappa - 1} = \text{const}$$

Z równania gazu doskonałego wynika, że:

$$T = \frac{p \cdot V}{R}$$

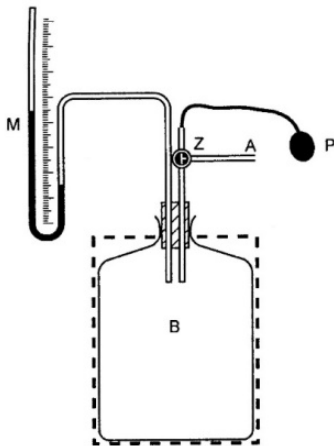
i ostatecznie otrzymamy równanie przemiany adiabatycznej w postaci podanej przez Poissona (tzw. prawo Poissona):

$$p \cdot V^\kappa = \text{const}$$

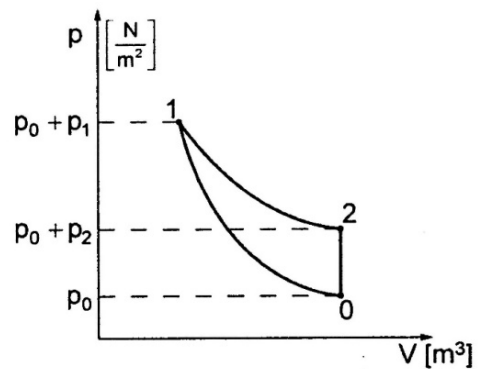
UKŁAD DOŚWIADCZALNY

Do pomiaru stosunku C_p/C_V (molowego ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do molowego ciepła właściwego przy stałej objętości) używamy urządzenia składającego się z:

- szklanego balonu (**B**) wypełnionego powietrzem,
- różnicowego manometru cieczowego (**M**) do pomiaru różnic ciśnienia atmosferycznego i ciśnienia gazu zamkniętego w balonie,
- rurki z zaworem (**Z**) pozwalającym na połączenie balonu bądź z powietrzem atmosferycznym (**A**) bądź z pompką (**P**).



Rys. 5. Schemat układu do pośredniego pomiaru stosunku $\kappa = C_p/C_V$.



Rys. 6. Cykl przemian gazu w balonie układu pomiarowego.

Założmy, że ciśnienie gazu w balonie jest o p_1 wyższe od ciśnienia atmosferycznego p_0 (Rys. 6. – punkt I). Otwórzmy zawór i połączmy balon z atmosferą. Gaz zawarty w balonie rozpręża się adiabatycznie i ciśnienie gazu w balonie obniża się do wartości równej ciśnieniu atmosferycznemu. Jednocześnie obniża się temperatura gazu w balonie. Na Rys. 6. odpowiada to przejściu z punktu 1 do punktu 0 po adiabadacie:

$$p \cdot V^\kappa = \text{const}$$

Po zamknięciu zaworu, gaz w balonie będzie się ogrzewał do temperatury otoczenia w sposób izochoryczny (stała objętość balonu). Ciśnienie gazu w balonie wzrośnie o p_2 (punkt 2 na Rys. 6.). Zmianę objętości gazu wskutek zmiany poziomu cieczy w manometrze możemy zaniedbać, jako bardzo małą w porównaniu z całkowitą objętością balonu. Ponieważ temperatura otoczenia jest stała, punkty 1 i 2 na Rys. 6. powinny leżeć na tej samej izotermie $p \cdot V = \text{const}$. Przejściu izotermicznemu z punktu 1 do punktu 2 towarzyszy zmiana ciśnienia:

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

Aby wyznaczyć wartość stosunku C_p/C_v , musimy znaleźć związek pomiędzy zmianą ciśnienia w czasie rozprężenia adiabatycznego p_1 w czasie sprężania izotermicznego Δp i szukaną wartością κ .

$$\frac{dp}{p} + \kappa \cdot \frac{dV}{V} = 0 \qquad \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = 0$$

Przechodząc od różniczek do przyrostów skończonych otrzymamy:

$$\frac{p_1}{p} + \kappa \cdot \frac{\Delta V}{V} = 0 \qquad \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = 0$$

Poprzez proste przekształcenia z ostatniego układu równań otrzymamy:

$$\frac{p_1}{\Delta V} = -\kappa \cdot \frac{p}{V} \qquad \frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{p}{V}$$

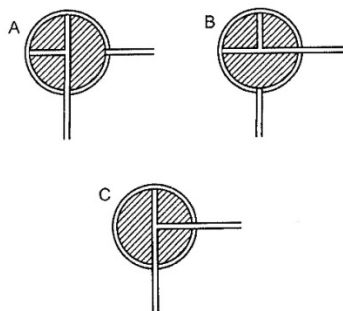
$$\kappa = \frac{p_1}{\Delta p} = \frac{p_1}{p_1 - p_2} \qquad (1)$$

Ponieważ ciśnienia p_1 i p_2 mierzymy manometrem (U-rurką) poprzez pomiar różnicy poziomów cieczy w jego obu częściach. Korzystając ze wzoru na ciśnienie hydrostatyczne $p = \rho \cdot g \cdot h$ otrzymamy:

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \qquad (2)$$

gdzie: h_1 – różnica poziomów cieczy w manometrze (nadwyżka ciśnienia w balonie ponad ciśnienie atmosferyczne) wytworzona za pomocą pompki (gruszki gumowej),
 h_2 – różnica poziomów cieczy w manometrze powstała po adiabatycznym rozprężeniu gazu.

WYKONANIE POMIARÓW



Rys. 7. Kolejne ustawienia kurka zaworu.

1. Kurek zaworu Z ustawić w położeniu A (Rys. 7.) łącząc pompę z balonem i za pomocą pompki wytworzyć nadwyżkę ciśnienia w balonie h_1 . Po wytworzeniu nadwyżki ciśnienia h_1 kurek zaworu Z ustawić w położeniu B. Nadwyżka ciśnienia powinna odpowiadać różnicy poziomów słupa cieczy w manometrze wynoszącej ok. 10-15 cm. Ponieważ w czasie sprężania temperatura gazu może ulec zmianie, należy odczekać (około 3 minut) aż do ustalenia się temperatury gazu, a tym samym do ustalenia się wartości różnicy poziomów. Ze skali manometru odczytać wartość h_{1L} położenia poziomu słupa cieczy w lewym ramieniu manometru oraz wartość h_{1P} położenia poziomu słupa cieczy w prawym ramieniu manometru.
2. Za pomocą kurka Z (położenie C, Rys. 7.) połączyć balon z powietrzem atmosferycznym. Natychmiast po wyrównaniu poziomów cieczy w manometrze zamknąć balon ustawiając kurek Z w położeniu B. Odczekać (około 3–4 min.) do ustalenia się różnicy h_2 poziomów cieczy w manometrze i kolejno odczytać wartość h_{2L} położenia poziomu słupa cieczy w lewym ramieniu manometru oraz wartość h_{2P} położenia poziomu słupa cieczy w prawym ramieniu manometru.
3. Pomiary opisane w pkt. 1 i 2 powtórzyć co najmniej $n = 10$ -krotnie. Wyniki pomiarów zanotować w Tabeli Pomiarów.

TABELA POMIARÓW

i	przed przemianą adiabatyczną		po przemianie adiabatycznej	
	h_{1L}	h_{1P}	h_{2L}	h_{2P}
	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]
1				
.....				
n				

Z uwagi na użycie tej samej skali i metody do pomiarów poziomów cieczy, odpowiednio przyjmujemy identyczne wartości niepewności wzorcowania i oszacowania niepewności eksperymentatora:

$$\Delta_d h_{iL,P} = \Delta_d h_{1L} = \Delta_d h_{1P} = \Delta_d h_{2L} = \Delta_d h_{2P} = \dots \dots [\text{cm}]$$

$$\Delta_e h_{iL,P} = \Delta_e h_{1L} = \Delta_e h_{1P} = \Delta_e h_{2L} = \Delta_e h_{2P} = \dots \dots [\text{cm}]$$

OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

1. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności rozszerzonej ($k = 2$) bezpośredniego pomiaru położenia poziomu cieczy w dowolnym ramieniu rurki manometru:

$$U(h_{1L}) = U(h_{1P}) = U(h_{2L}) = U(h_{2P}) = k \cdot u(h_{1L}) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d h_{1L})^2 + (\Delta_e h_{1L})^2}{3}} \quad (3)$$

2. Wykonać przykład obliczenia różnicy poziomów h_1 (lub h_2) cieczy w rurkach manometru :

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{1L} - h_{1P} \\ &\text{lub} \\ h_2 &= h_{2L} - h_{2P} \end{aligned} \quad (4)$$

3. Wykonać przykład oszacowania niepewności $U(h_1)$ (lub $U(h_2)$):

$$U(h_1) = \sqrt{\left(\frac{\partial h_1}{\partial h_{1L}} \cdot U(h_{1L})\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial h_{1P}} \cdot U(h_{1P})\right)^2} = \sqrt{(U(h_{1L}))^2 + (U(h_{1P}))^2} = \sqrt{2 \cdot (U(h_{1L}))^2} \quad (5)$$

lub

$$U(h_2) = \sqrt{\left(\frac{\partial h_2}{\partial h_{2L}} \cdot U(h_{2L})\right)^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial h_{2P}} \cdot U(h_{2P})\right)^2} = \sqrt{(U(h_{2L}))^2 + (U(h_{2P}))^2} = \sqrt{2 \cdot (U(h_{2L}))^2}$$

4. Wykonać przykład obliczenia wartości κ_i :

$$\kappa_i = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad (6)$$

5. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności $U(\kappa_i)$:

$$U(\kappa_i) = \sqrt{\left(\frac{\partial \kappa_i}{\partial h_1} \cdot U(h_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial \kappa_i}{\partial h_2} \cdot U(h_2)\right)^2} = \frac{\kappa_i}{h_1 - h_2} \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1} \cdot U(h_1)\right)^2 + (U(h_2))^2} \quad (7a)$$

W celu wykonania obliczeń wartości $U(\kappa_i)$ można korzystać z wzoru (7a), albo z jego uproszczonej postaci (7b). Biorąc pod uwagę zastosowaną w doświadczeniu metodę oraz użyte przyrządy pomiarowe wystarczy zauważyć, że z równań (3) i (5) wynika równość wartości: $(U(h_{1L})) = (U(h_{2L}))$. Stąd prawdziwą jest równość wartości niepewności: $U(h_1) = U(h_2)$.

Gdy w zapisie (7a) skorzysta się z zależności (6) oraz właściwości powyższych równości, otrzymuje się wygodniejszą dla obliczeń postać (7b):

$$U(\kappa_i) = \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{(h_1 - h_2)^2} \cdot U(h_1) \quad (7b)$$

6. Wykonać obliczenia z użyciem pozostałych danych, uzupełniając wartościami Tabelę Wyników:

TABELA WYNIKÓW

i	h_1 [cm]	$U(h_1)$ [cm]	h_2 [cm]	$U(h_2)$ [cm]	κ_i [-]	$U(\kappa_i)$ [-]
1						
2						
...						
n						

7. Wykonać przykład obliczenia średniej wartości κ :

$$\kappa = \frac{\sum_{i=1}^n \kappa_i}{n} \quad (8)$$

8. Wykonać przykład oszacowania wartości całkowitej niepewności $U(\kappa)$ z uwzględnieniem metody typu A i metody typu B:

$$U(\kappa) = \sqrt{(U_A(\kappa))^2 + (U_B(\kappa))^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\kappa - \kappa_i)^2}{n \cdot (n-1)} + \frac{\sum_{i=1}^n (U(\kappa_i))^2}{n}} \quad (9)$$

9. Zestawić otrzymaną wartość κ z wartością tablicową dla powietrza suchego i teoretyczną dla gazów złożonych z cząsteczek dwuatomowych.

Wartość wykładnika adiabaty dla powietrza	$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$	$U(\kappa) = U\left(\frac{c_p}{c_v}\right)$
	[-]	[-]
wyznaczona z doświadczenia		
zamieszczona w tablicach fizycznych*		
teoretyczna dla gazów o cząsteczkach dwuatomowych**		0

* Podać z co najmniej 3. cyframi znaczącymi; w przypadku braku w tablicach wartości jej niepewności, przyjmując 10-krotność jednostki najmniej znaczącej cyfry.

** Fizyka dla szkół wyższych, openstax, Tom 2., Rozdział 3.

10. Opracować i zapisać wnioski z ćwiczenia. Z uwzględnieniem wielkości oszacowanych niepewności dokonać oceny wyniku otrzymanego w doświadczeniu z wartością $\frac{c_p}{c_v}$ dla powietrza zamieszczoną w tablicach fizycznych, oraz z przewidywaną przez teorię wartością $\frac{c_p}{c_v}$ dla gazów o cząsteczkach dwuatomowych (około 99.8% objętości powietrza zawiera mieszaninę cząsteczek O_2 i N_2)

LITERATURA

- [1] SZCZENIOWSKI S.: Fizyka doświadczalna, cz. II, PWN, Warszawa 1964.
 [2] MASSALSKI J., MASSALSKA M.: Fizyka dla inżynierów, cz. I, WNT, Warszawa 1973.
 [3] DRYŃSKI T.: Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, PWN, Warszawa 1978.
 [4] SZYDŁOWSKI H.: Pracownia fizyczna, PWN, Warszawa 1973.
 [5] Ćwiczenia Laboratoryjne z Fizyki (praca zbiorowa), Skrypt Nr 279, Politechnika Opolska 2007.