MIĘDZYNARODOWE NORMY

OCENY NIEPEWNOŚCI POMIARÓW

wersja pełna (15 stron)

MIĘDZYNARODOWE NORMY OCENY NIEPEWNOŚCI POMIARÓW

Spis treści

1. Wprowadzenie

W roku 1995, po wielu latach pracy, uzgodniono międzynarodowe normy dotyczące terminologii i sposobu określania niepewności pomiarowych. Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO) opublikowała odpowiedni „Przewodnik" [l]. Uzgodnień dokonało 7 międzynarodowych organizacji: Międzynarodowe Biuro Miar (BIPM - Bureau international des poids et mesures), Międzynarodowa Komisja Elektrotechniczna (IEC - International Electrotechnical Commission), Międzynarodowa Federacja Chemii Klinicznej (IFCC - International Federation of Clinical Chemistry), Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO - International Organization for Standardization), Międzynarodowa Unia Chemii Czystej i Stosowanej (IUPAC - International Union of Pure and Applied Chemistry), Międzynarodowa Unia Fizyki Czystej i Stosowanej (IUPAP - International Union of Pure and Applied Physics) oraz Międzynarodowa Organizacja Metrologii Prawnej (OMIL - International Organization of Legal Metrology).

Po dokonaniu przekładu na język polski [3] i przyjęciu odpowiedniej ustawy, do podjęcia której zobowiązują Polskę umowy międzynarodowe, stosowanie norm ISO w zakresie obliczania i podawania w publikacjach niepewności pomiarów stanie się obowiązkiem podobnym do obowiązku stosowania układu SI.

Nowości dotyczą przede wszystkim odróżnienia niepewności pomiarów od błędów, w potocznym tego słowa znaczeniu, przyjęcia uzgodnionej terminologii i powszechnie akceptowanej miary niepewności w pomiarach, szerszego korzystania z metod statystycznych przy ocenie i obliczaniu niepewności pomiarowych.

Wprowadzenie nowych norm pociągnie za sobą konieczność dostosowania podręczników. Szczególnie dotyczy to podręczników akademickich do laboratoriów (fizycznych, chemicznych, technicznych), metrologii, teorii pomiarów oraz różnego rodzaju tablic fizycznych.

Przypomnijmy charakterystyczne cechy dwu, tradycyjnych, konkurencyjnych modeli, opartych na pojęciach niepewności maksymalnej i średniej kwadratowej.

1.1 Deterministyczna teoria niepewności maksymalnej

Koncepcja niepewności maksymalnej zakłada, że można określić przedział wokół wielkości mierzonej x, w którym na pewno znajduje się wielkość rzeczywista. Przyjęto zapisywać ten przedział jako $x \pm \Delta x$, gdzie Δx nazywamy niepewnością maksymalną. Omówmy wybrane konsekwencje tego podejścia:

a) Prawo przenoszenia niepewności.
Jeżeli $y = f(x_1, x_2,....)$ i niepewności maksymalne Δx_i są małe w porównaniu z wartościami zmiennych x_i to niepewność maksymalną y wyraża się wzorem, potocznie nazywanym "metodą różniczki zupełnej":

$$\Delta y = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + ...$$

b) Przedstawienie niepewności maksymalnych na wykresach.
Jeżeli dokładność pomiaru współrzędnych x_i oraz y_i danego punktu wykresu charakteryzują niepewności maksymalne Δx oraz Δy, to prawdziwe położenie punktu znajduje się na pewno wewnątrz prostokąta niepewności o bokach $2\Delta x$, $2\Delta y$. Gdy jedna z niepewności jest pomijalnie mała, redukuje się on do odcinka niepewności.
c) Dopasowanie prostej do zbioru punktów pomiarowych.
Przez zbiór prostokątów niepewności prowadzimy dwie proste $y = ax + b$ o nachyleniu największym a_+ i najmniejszym a_-. Prawdziwa wartość a zawarta jest w przedziale $[a_-, a_+]$, z którego wyznaczamy $a = (a_+ + a_-)/2$ i $\Delta a = (a_+ - a_-)/2$. Przedstawiony sposób dopasowania prostej bywa nazywany metoda graficzną, w przeciwieństwie do "analitycznej" metody najmniejszych kwadratów.
d) Wnioskowanie o zgodności wyników pomiaru z innymi rezultatami.
Deterministyczna natura niepewności maksymalnej umożliwia jednoznaczne stwierdzenie zgodności lub niezgodności uzyskanego wyniku z wartością rzeczywistą lub inną wartością zmierzoną ze znaną niepewnością maksymalną. W drugim przypadku zgodność zachodzi wówczas, gdy odpowiednie przedziały mają odcinek wspólny.

1.2 Klasyczny model statystyczny

Klasyczny model statystyczny oparty jest na założeniu, że błędy przypadkowe podlegają rozkładowi normalnemu. Omówmy wybrane konsekwencje tego podejścia:
a) Prawo przenoszenia niepewności.
Jeżeli wielkości bezpośrednio mierzone x_i nie są skorelowane, to niepewność średnią kwadratową $s(y)$ funkcji $y = f(x_1, x_2,....)$ obliczamy ze wzoru

$$s(y) = \sqrt{\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}s(x_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial x_2}s(x_2)\right]^2 + ...}$$ gdzie $s(x_i)$ jest niepewnością średnią kwadratową x_i.

b) Przedstawienie niepewności średniej kwadratowej na wykresach.
Jednowymiarowy odcinek niepewności uzyskuje znaczenie probabilistyczne: na odcinku $x_i \pm s(x_i)$ wartość oczekiwana znajduje się z prawdopodobieństwem około 68%. Odpowiednikiem prostokątów niepewności są elipsy niepewności. Dla zmiennych nieskorelowanych wartość rzeczywista znajduje się z prawdopodobieństwem około 68 % wewnątrz elipsy o półosiach $s(x)$ i $s(y)$. Jeśli zmienne są skorelowane, to elipsa jest nachylona. Rysowanie elipsy niepewności nie jest praktykowane, stosuje się natomiast ważną zasadę praktyczną: dopasowana krzywa dla ok. 2/3 punktów pomiarowych winna przecinać się z odcinkami niepewności.
c) Dopasowanie prostej do zbioru punktów pomiarowych (metodą najmniejszych kwadratów).
Przy badaniu ze względu na dwie cechy X i Y, próbkę stanowi n par liczb (x_i, y_i), które traktujemy jako współrzędne punktu na płaszczyźnie. Wartości parametrów prostej $y = ax + b$ "najlepiej" dopasowanej do tych punktów i niepewności tych parametrów wynikają z warunku

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax+b)]^2 = \min \ .$$

d) Wnioskowanie o zgodności wyników pomiaru z innymi rezultatami.
Wnioskowanie statystyczne polega na określeniu przedziału ufności, w którym wartość oczekiwana znajduje się z zadanym prawdopodobieństwem, zwanym poziomem ufności.

2. Wyrażanie niepewności pomiaru - nowe normy międzynarodowe

2.1 Ogólne terminy metrologiczne

Wielkość (mierzalna) - cecha zjawiska, ciała lub substancji, którą można wyróżnić jakościowo i wyznaczyć ilościowo. Termin "wielkość" może się odnosić do wielkości w znaczeniu ogólnym (długość, czas, masa, temperatura, opór elektryczny) lub do wielkości w znaczeniu szczególnym, to znaczy do "wielkości określonej" (długość danego pręta, opór elektryczny danej próbki drutu)

Wartość (wielkości) - wyrażenie ilościowe wielkości.

Wartość prawdziwa (wielkości) - wartość zgodna z definicją wielkości określonej. Jest to wartość, jaką uzyskałoby się jako wynik bezbłędnego pomiaru. Jest ona ze swej natury nieznana. W Przewodniku "wartość prawdziwa" i "wartość wielkości mierzonej" traktowane są jak synonimy.

Wartość umownie prawdziwa - wartość przypisana wielkości określonej i uznana, niekiedy umownie, jako wartość wyznaczona z niepewnością akceptowaną w danym zastosowaniu. Przykładem może być zalecenie przez CODATA (w 1986 roku) następującej wartości dla stałej Avogardo, N_A: 6,0221367 x 10^{23} mol^{-1}. Wartość umownie prawdziwa jest niekiedy nazywana "wartością przypisaną", "najlepszym oszacowaniem wartości", "wartością umowną" lub "wartością odniesienia".

Pomiar - zbiór operacji mających na celu wyznaczenie wartości wielkości.

Zasada pomiaru - naukowa podstawa pomiaru.

Metoda pomiarowa - logiczny ciąg wykonywanych podczas pomiaru operacji, opisanych w sposób ogólny.

Procedura pomiarowa - zbiór operacji opisanych w sposób szczegółowy i realizowanych podczas wykonywania pomiarów zgodnie z daną metodą.

Wielkość mierzona - wielkość określona, stanowiąca przedmiot pomiaru.

Wielkość realizowana - w przypadku idealnym powinna być całkowicie zgodna z definicją wielkości mierzonej. Często jednak wielkość taka nie może być zrealizowana i mierzy się wielkość będącą jedynie przybliżeniem wielkości mierzonej. Przypuśćmy na przykład, że wielkością mierzoną jest grubość danego arkusza materiału w określonej temperaturze. Obiekt badany przenosi się do miejsca o temperaturze zbliżonej do wymaganej i mierzy się w określonym miejscu za pomocą mikrometru jego grubość - wynik tego pomiaru jest wielkością zrealizowaną.

Wynik pomiaru - wartość przypisana wielkości mierzonej, uzyskana drogą pomiaru.

Wynik surowy - wynik pomiaru przed korekcją błędu systematycznego.

Wynik poprawiony - wynik pomiaru po korekcji błędu systematycznego. Wynik pomiaru koryguje się ze względu na wszystkie uznane za znaczące oddziaływania systematyczne. Chociaż końcowy, poprawiony wynik jest czasem uważany za najlepsze oszacowanie wartości "prawdziwej" wielkości mierzonej, to w rzeczywistości jest on po prostu najlepszym oszacowaniem wartości wielkości, którą zamierzano zmierzyć.

Dokładność pomiaru - stopień zgodności wyniku pomiaru z wartością prawdziwą wielkości mierzonej. Nie należy stosować terminu "precyzja" zamiast "dokładność".

Powtarzalność (wyników pomiarów) - stopień zgodności wyników kolejnych pomiarów tej samej wielkości mierzonej, wykonywanych w tych samych warunkach pomiarowych.

Odtwarzalność (wyników pomiarów) - stopień zgodności wyników pomiarów tej samej wielkości mierzonej, wykonywanych w zmienionych warunkach.

Odchylenie standardowe eksperymentalne - parametr $s(q_k)$ charakteryzujący rozrzut wyników serii n pomiarów tej samej wielkości mierzonej, określony wzorem $s(q_k) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(q_k - \overline{q}\right)^2}$, w którym q_k oznacza wynik k. pomiaru, a $\overline{q}$ średnią arytmetyczną n rozważanych wyników. Wyrażenie $s(q_k)/\sqrt{n}$ jest estymatorem odchylenia standardowego rozkładu zmiennej losowej $\overline{q}$ i jest nazywane **odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej.**

Błąd pomiaru - różnica między wynikiem pomiaru a wartością prawdziwą wielkości mierzonej. Ponieważ wartość prawdziwa nie może być określona, stosuje się w praktyce wartość umownie prawdziwą. Bywa też nazywany **błędem bezwzględnym pomiaru.** Poprawiony wynik pomiaru nie jest wartością wielkości mierzonej, jest on obarczony błędem wynikającym z: niedoskonałości pomiaru realizowanej wielkości powodowanej przypadkowymi zmianami wyników obserwacji (oddziaływania przypadkowe), niedokładnego określenia poprawek błędów wywołanych oddziaływaniami systematycznymi, oraz niepełnej znajomości niektórych zjawisk fizycznych (także oddziaływań systematycznych). Ani wartość realizowanej wielkości ani też wartość wielkości mierzonej nie mogą być dokładnie znane, mogą być jedynie znane estymaty tych wartości.
Błąd względny - stosunek błędu pomiaru do wartości prawdziwej wielkości mierzonej.
Błąd systematyczny - różnica między średnią z nieskończonej liczby pomiarów tej samej wielkości mierzonej, wykonanych w warunkach powtarzalności, a wartością prawdziwą wielkości mierzonej. Błąd systematyczny i jego przyczyny nie mogą być znane dokładnie, podobnie jak wartość prawdziwa.
Poprawka - wartość dodana algebraicznie do surowego wyniku pomiaru w celu skompensowania błędu systematycznego.
Współczynnik poprawkowy - współczynnik liczbowy, przez który należy pomnożyć surowy wynik pomiaru, aby skompensować błąd systematyczny. Ponieważ błąd systematyczny nie może być znany dokładnie, kompensacja nie może być zupełna.
Błąd przypadkowy - różnica między wynikiem pomiaru a średnią z nieskończonej liczby wyników pomiarów tej samej wielkości mierzonej, wykonanych w warunkach powtarzalności. Błąd przypadkowy jest równy błędowi pomiaru minus błąd systematyczny. Ponieważ można wykonać tylko skończoną liczbę pomiarów, można więc dokonać jedynie oszacowania błędu przypadkowego.
Niepewność pomiaru - parametr związany z wynikiem pomiaru**,** charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej. Podczas gdy dokładne wartości składowych błędu wyniku pomiaru są nieznane i niepoznawalne, to niepewności związane z oddziaływaniami przypadkowymi i systematycznymi można obliczyć. Nawet jednak gdy obliczone niepewności są małe, to ciągle nie ma gwarancji, że błąd wyniku pomiaru jest mały, ponieważ podczas określania poprawki lub oceny stopnia nieznajomości zjawiska, pewne oddziaływania systematyczne mogły zostać pominięte, gdyż nie zostały rozpoznane.

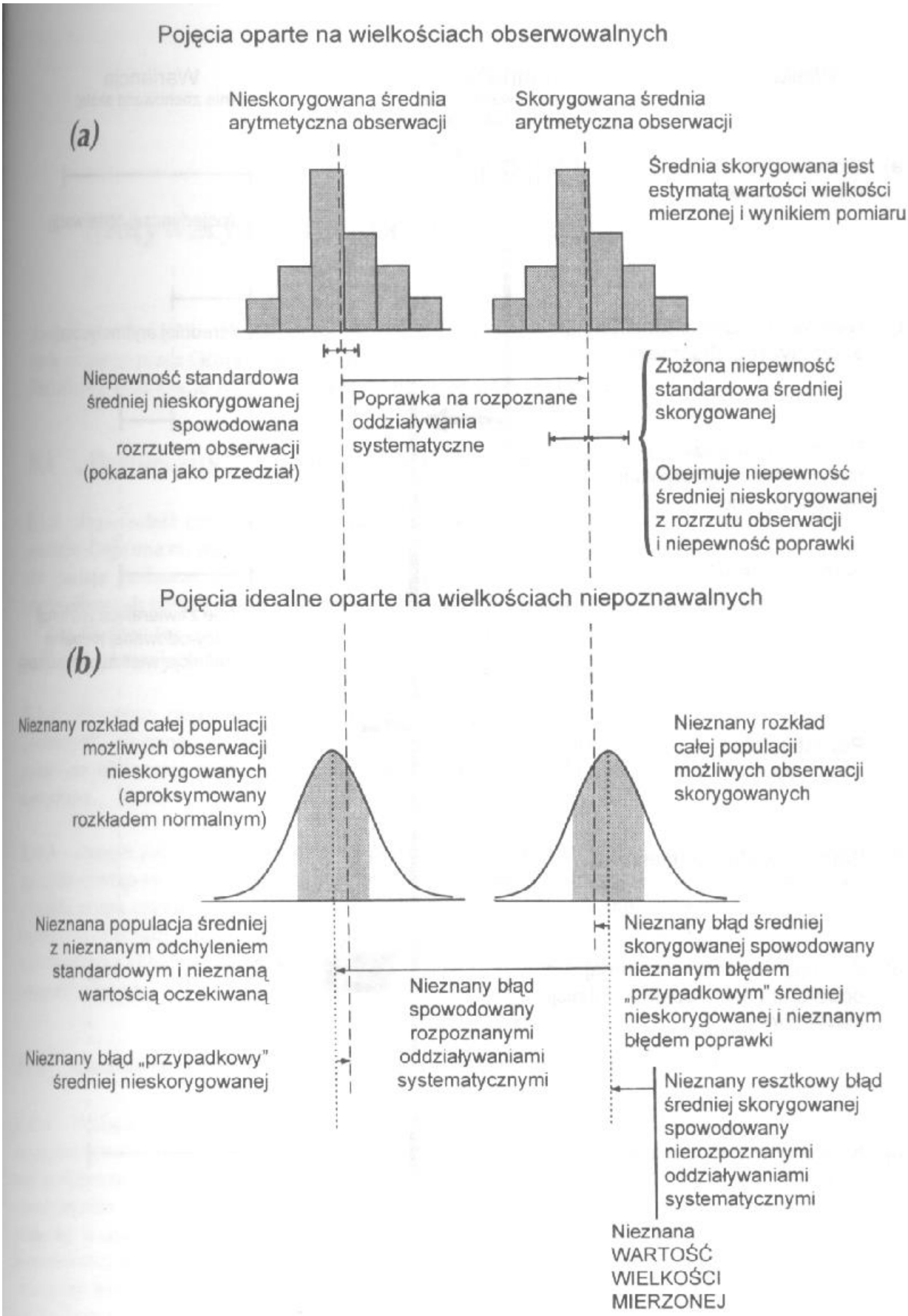
Na rysunkach 1a i 1b zamieszczone zostały graficzne przedstawienia pojęć: wartość, błąd, niepewność.

2.2 Terminy metrologiczne o nowym znaczeniu

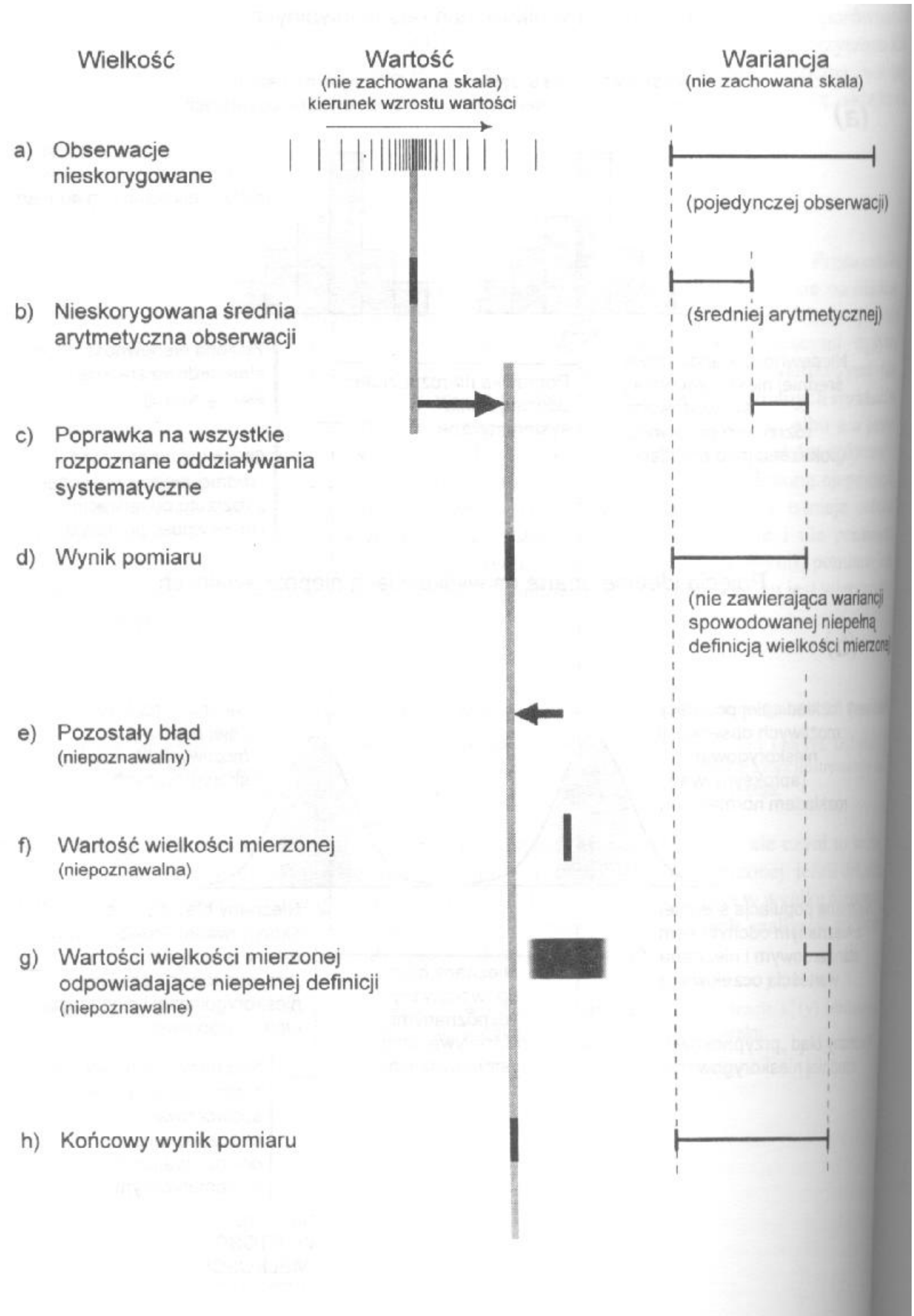
Pierwszą rzeczą podlegającą unormowaniu jest terminologia. Najważniejszym, na nowo określonym, terminem jest niepewność (uncertainty). Słowo „niepewność" bez dodatkowych określeń ma podwójne znaczenie: zarówno pojęcia ogólnego, jak i miary ilościowej. W przypadku stosowania terminu w znaczeniu ilościowym dodaje się odpowiedni przymiotnik.

Według aktualnych zaleceń terminologicznych o błędzie pomiaru mówi się wtedy, gdy występuje jakaś niedoskonałość w pomiarze. Tradycyjnie wyróżnia się dwa składniki błędu: przypadkowy i systematyczny. Należy zauważyć, że pojęcie błędu jest wyidealizowane, bowiem nie można znać jego dokładnej wartości. Błąd przypadkowy jest wynikiem nieprzewidywalnych czasowych lub przestrzennych zmian czynników przypadkowych wpływających na pomiar; daje on przyczynek zwiększający rozrzut wyników i nie można go skompensować. Zakładamy, że błąd przypadkowy ma rozkład normalny a jego wartość oczekiwana wynosi zero.

Błąd systematyczny (w nowej terminologii nazywany błędem pomiaru) jest również wynikiem czasowych lub przestrzennych zmian czynników wpływających na pomiar, ale te czynniki można rozpoznać, a jeżeli ich wpływ jest znaczący, to obowiązkiem eksperymentatora jest wprowadzenie poprawek kompensujących. W tabeli 1 podano ważniejsze przyczyny oraz przykłady występowania błędów. Przy analizie niepewności pomiarów zakładamy, że do wyników pomiarów wprowadzono już poprawki kompensujące błąd. Poprawki również są obarczone niepewnością, stąd



Rys. 1 a Graficzne przedstawienie pojęć: wartość, błąd, niepewność.



Rys. D.2. Graficzne przedstawienie pojęć: wartość, błąd, niepewność.

Rys. 1b Graficzne przedstawienie pojęć: wartość, błąd, niepewność.

nawet po wniesieniu poprawki wynik jest obarczony pewnym błędem. Zatem prawdziwy błąd systematyczny wynika z nieidealności przyrządów pomiarowych i/lub mierzonych obiektów. Przewodnik uważa go za zjawisko losowe, gdyż nie znamy a priori jego wielkości i znaku, tak samo jak w przypadku błędu przypadkowego. Można mu przypisać rozkład prawdopodobieństwa - co jest zasadniczą nowością w porównaniu do modelu deterministycznego. Cechą błędu systematycznego jest to, że wykonując pomiar jednym przyrządem dysponujemy tylko jedną realizacją zmiennej losowej. Losową próbkę można jednak uzyskać, jeżeli pomiary wykonamy przy użyciu zbioru przyrządów tej samej dokładności - można w ten sposób uzyskać doświadczalny rozkład prawdopodobieństwa.

Tabela 1. Błędy pomiarowe [6]

Przyczyna	**Przykłady**
Działanie czynników niekontrolowanych, uznanych za nieistotne	Metoda: Pomiar długości nienaprężonego przewodu
	Zmysły: Opóźnienie reakcji włączenia sekundomierza
	Przyrząd: Pomiary średnicy kulek ołowianych wykonane mikromierzem (deformacja)
Pomyłka eksperymentatora	Odczytanie 37 zamiast 73
Niepoprawna obsługa przyrządu	Nie wyzerowane wskazanie zerowe miernika
Przyjęcie błędnych założeń	Pominięcie składu izotopowego przy wyznaczaniu masy atomowej
Uproszczenie warunków pomiaru	Badanie spadku swobodnego w powietrzu
Stosowanie przybliżonego wzoru	Stosowanie wzoru $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ do wyznaczania g

Wśród wielu przyczyn niepewności pomiarowych należy wymienić następujące (nie wszystkie są niezależne): a) niepełna definicja wielkości mierzonej, b) niereprezentatywność próbki (serii wyników pomiarów), c) niedokładna znajomość wpływu działania czynników zewnętrznych (otoczenia) lub ich niedokładny pomiar, d) błędy obserwatora przy odczytywaniu przyrządów analogowych, e) skończona zdolność rozdzielcza przyrządów, f) niedokładne wartości stosowanych wzorców i materiałów odniesienia, g) niedokładne wartości stałych lub parametrów pochodzących z innych źródeł, h) przybliżenia i założenia upraszczające w pomiarach oraz procedurze pomiarowej.

W Przewodniku stosowane są następujące terminy o nowym znaczeniu:

1. **ocena niepewności metodą typu A** (type A evaluation of uncertainty), oparta na metodzie określania niepewności pomiaru drogą analizy statystycznej serii wyników pomiarów;
2. **ocena niepewności metodą typu B** (type B evaluation of uncertainty), oparta na metodzie określania niepewności pomiarów drogą inną niż w przypadku A, na przykład na podstawie wielkości działki elementarnej skali przyrządu pomiarowego;
3. **niepewność standardowa** (standard uncertainty), która jest jedyną miarą niepewności akceptowaną przez Przewodnik, określona jako pierwiastek kwadratowy z estymatora wariancji średniej arytmetycznej pomiarów bezpośrednich. Zasadniczą jej zaletą są wygodne własności matematyczne tego parametru statystycznego: możliwość estymowania przy użyciu wzorów bez współczynników numerycznych i twierdzenie o wariancji sumy zmiennych losowych, warunkujące funkcjonowanie prawa przenoszenia niepewności. Ważną nowością jest symbol niepewności standardowej, u (od ang. uncertainty), którego możemy używać na trzy sposoby: ***u*, *u*(*x*), *u*(stężenie NaCl).** Oznaczenie z użyciem nawiasów stosujemy, gdy trzeba określić co jest wielkością mierzoną. Można się zżymać, że zastosowano symbol funkcji matematycznej w sytuacji, gdy niepewność jest liczbą. Zaletą takiego zapisu jest to, że informacja o wielkości mierzonej może być wyrażona słownie, np. u(stężenie NaCl), co ułatwia tworzenie dokumentacji pomiaru. Nowe nazewnictwo jest ukłonem w kierunku nauk innych niż fizyka, gdzie nie ma zwyczaju oznaczania wszystkich wielkości przy użyciu jednoliterowych symboli.

Przewodnik nie wprowadził osobnego symbolu dla użytecznego pojęcia niepewności względnej. Zgodnym z logiką symbolem jest u_r (indeks *r* od ang. relative), zalecony do użytku w USA przez Narodowy Instytut Wzorców i Technologii (NIST* - National Institute of Standards and Technology); $u_r(x) = u(x)/\overline{x}$

4. **złożona niepewność standardowa u_c** (combined standard uncertainty), która jest niepewnością wyników pomiarów pośrednich $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k \ldots\ldots x_K)$, gdzie symbole $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots\ldots x_K$ oznaczają *K* wielkości mierzonych bezpośrednio, jest obliczana (wyznaczana) z prawa przenoszenia niepewności pomiaru;
5. **niepewność rozszerzona *U*** albo ***U*(*y*)** (expanded uncertainty), która jest miarą pewnego „przedziału ufności" otaczającego wynik pomiaru pośredniego. Oczekuje się, że w przedziale tym jest zawarta duża część wartości, które w rozsądny sposób można przypisać wielkości mierzonej. Wartość *U* oblicza się podobnie jak granice przedziału ufności w metodach statystycznych, mnożąc złożoną niepewność standardową przez bezwymiarowy współczynnik rozszerzenia *k*.
6. **współczynnik rozszerzenia *k*** (coverage factor), który jest mnożnikiem złożonej niepewności standardowej, stosowanym w celu uzyskania niepewności rozszerzonej.

Międzynarodowa Norma nie neguje tradycyjnego rozróżnienia „błąd przypadkowy" oraz „błąd systematyczny". Za bardziej istotne uważa jednak rozróżnienie dwu sposobów określania niepewności standardowej: *typu A*, wynikającej z analizy statystycznej serii pomiarów, oraz *typu B*, wykorzystującej metody inne niż analiza statystyczna.

Ocena niepewności typu A może być stosowana tylko wtedy, gdy wiemy (przy pomocy oceny typu B!), że seria pomiarów nie ma znaczącej składowej systematycznej. Ocena typu B może być zastosowana w każdej sytuacji. Intencją twórców Normy jest jej dowartościowanie. Stwierdza się explicite, że „ocena niepewności typu B może być równie wiarygodna, jak ocena typu A, szczególnie wtedy, gdy ocena typu A jest oparta na stosunkowo małej liczbie obserwacji".

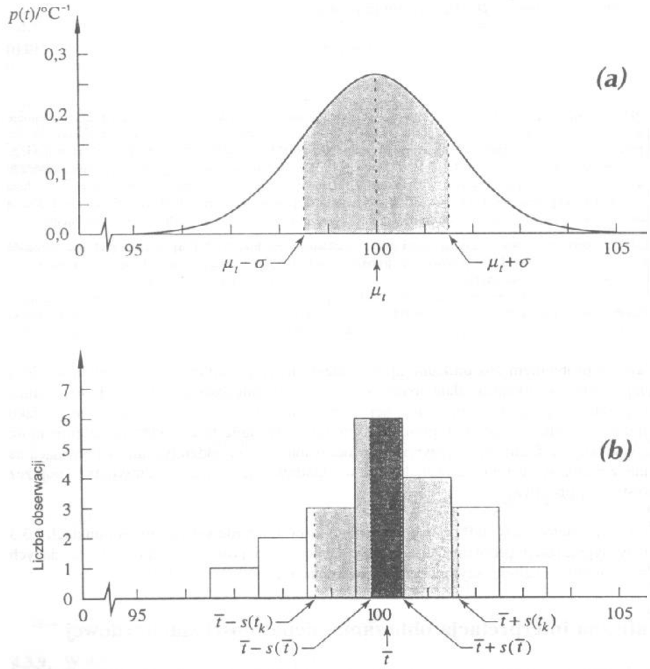
Obydwa sposoby oceny są oparte na rozkładach prawdopodobieństwa, a ilościową miarą każdego z tych składników jest estymator odchylenia standardowego. Niepewność standardową metodą typu A oblicza się na podstawie rozkładu częstości. Niepewność standardową metodą typu B oblicza się na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa przyjętego przez eksperymentatora. Graficzna interpretacja obliczania niepewności standardowej na podstawie powtórzonych obserwacji (metoda typu A) oraz a priori danego rozkładu (metoda typu B) przedstawiona jest na rysunkach 2 i 3, odpowiednio.

Niepewność standardową szacuje się metodą typu B w przypadku, gdy dostępny jest tylko jeden wynik pomiaru (lub tylko po jednym wyniku pomiaru każdej wielkości), albo gdy wyniki nie wykazują rozrzutu. Wówczas niepewność standardową ocenia się na podstawie wiedzy o danej wielkości lub o przedziale, w którym wartość rzeczywista powinna się mieścić. W przypadku wyników nie wykazujących rozrzutu głównym przyczynkiem niepewności pomiarów jest niepewność wzorcowania $\Delta_d x$ równa wartości działki elementarnej stosowanego miernika. W pracy [5] na temat działki elementarnej czytamy:

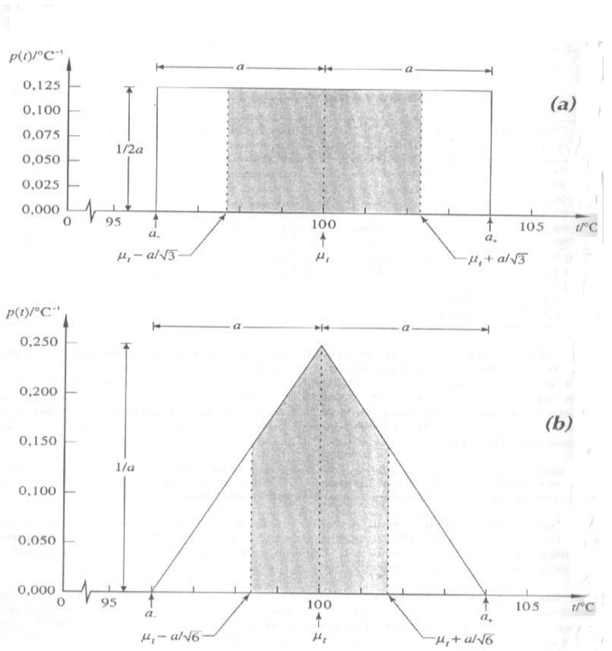
"Działką elementarną nazywamy zakres wielkości mierzonej odpowiadający odległości między kolejnymi kreskami podziałki analogowej. Pojęcie to można w oczywisty sposób uogólnić na przypadek odczytu cyfrowego. Należy podkreślić, że Przewodnik pojęcia działki elementarnej w ogóle nie wprowadza. W praktyce dydaktycznej pojęcia tego ignorować nie można - choćby dla sprostowania popularnego w społeczeństwie utożsamienia działki elementarnej z dokładnością pomiaru. W najprostszym przedstawieniu zagadnienia celowe jest wyróżnienie przypadku prostych przyrządów mechanicznych i elektronicznych przyrządów cyfrowych. Dla przyrządów takich jak przymiar milimetrowy, śruba mikrometryczna, czy termometr utożsamienie najmniejszej działki z niepewnością standardową należy uznać za rozsądne pierwsze przybliżenie, równie dobre, jak tradycyjne utożsamianie działki elementarnej z niepewnością maksymalną. Ocena ta może być skorygowana w górę lub w dół zgodnie z posiadaną wiedzą i doświadczeniem. Na przykład, jeżeli mierzymy linijką średnicę monety jednogroszowej i odczytujemy „na oko" dziesiąte części

milimetra, to niepewność standardowa może zmniejszyć się nawet do 0,2 mm. Z drugiej strony, przy pomiarze rozmiarów pokoju taśmą mierniczą, niepewność jest na ogół większa niż 1 mm, choć skalę z podziałką milimetrową mamy na całej pięciometrowej taśmie.
W przyrządach z odczytem cyfrowym niepewność pomiaru podawana jest przez producenta w instrukcji obsługi, najczęściej jako określony ułamek wielkości mierzonej plus ułamek zakresu, $\Delta x = C_1\ x + C_2\ zakres$*."*

Przyjmuje się, że wartość $\Delta_d x$ jest równa połowie szerokości rozkładu jednostajnego (prostokątnego) i wtedy za niepewność standardową przyjmujemy $u(x) = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{3}}$ (estymator odchylenia standardowego w rozkładzie jednostajnym). Jeżeli na podstawie ogólnej wiedzy można przyjąć symetryczny rozkład trójkątny, to $u(x) = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{6}}$. Drugim przyczynkiem niepewności pomiarów nie wykazujących rozrzutu jest niepewność eksperymentatora $\Delta_e x$ spowodowana przyczynami znanymi eksperymentatorowi, ale od niego niezależnymi. Eksperymentator korzysta ze swego doświadczenia i wiedzy w celu określenia niepewności $\Delta_e x$ oraz wynikającej stąd niepewności standardowej (przykład podany jest w Tabeli 2). Często niepewność standardowa eksperymentatora jest szacowana również na podstawie rozkładu jednostajnego, czyli $u(x) = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{3}}$.
Niepewnościami obarczone są również wyniki zaczerpnięte z literatury, tablic matematycznych lub kalkulatora (przykład podany jest w Tabeli 2). Jeśli nie jest podana wartość odchylenia standardowego eksperymentalnego (jeśli jest podana, wtedy niepewność $u(x)$ jest równa temu odchyleniu) i brak jest jakiejkolwiek informacji o niepewności przyjmujemy, że niepewność $\Delta_t x$ jest równa 10 jednostek miejsca rozwinięcia dziesiętnego o najmniejszej wartości. Niepewność standardową obliczamy ze wzoru $u(x) = \frac{\Delta_t x}{\sqrt{3}}$.



Rys. 2 Graficzna interpretacja obliczania niepewności standardowej metodą typu A: a) rozkład normalny przyjęty jako hipotetyczny rozkład populacji generalnej, b) rozkład (histogram) elementów próbki



Rys. 3 Graficzna interpretacja obliczania niepewności standardowej na podstawie *a priori* danego rozkładu (metoda typu B): a) prostokątnego, b) trójkątnego

W tabeli 2 zostały zebrane wszystkie rodzaje niepewności pomiarowych, przyczyny i objawy ich występowania oraz przykłady pomiarów fizycznych, w których dane niepewności pojawiają się.

Tabela 2. Wykaz niepewności pomiarowych [6]

Nazwa (źródło)	**Objawy**	**Przyczyny**	**Przykład**
Niepewność przypadkowa (natura zjawiska)	Rozrzut wyników pomiarów wykonanych na elementach jednorodnego zbioru	Statystyczny charakter zjawiska fizycznego	Liczba rozpadów promieniotwórczych w jednostce czasu
		Brak identyczności elementów zbioru	Pomiary średnic kulek, masa ziaren nasion
Niepewność przypadkowa (określenie obiektu)	Rozrzut wyników kolejnych pomiarów tego samego obiektu	Niezgodność obiektu z przyjętym dla niego modelem	Wyniki pomiaru średnicy pręta uznanego za walec
Niepewność przypadkowa (czynniki nieistotne)	Rozrzut wyników pomiarów wykonanych w różnym czasie, miejscu , przez różne osoby.....	Zmienność czynników uznanych za nieistotne	Wyniki pomiarów wykonanych w różnych warunkach atmosferycznych
		Zmienność reakcji zmysłów lub przyrządów	Czas mierzony sekundomierzem, ocena równości oświetlenia
Niepewność wzorcowania (stosowane przyrządy lub wzorce)	Występuje zawsze. Dominuje, gdy nie ma rozrzutu wyników	Niepewność wzorcowania stosowanych mierników	Działka elementarna przyrządu analogowego
		Niepewność wzorców stanowiących odniesienie	Jednostka najmniejszej dekady miernika cyfrowego
Niepewność eksperymentatora (trudności odczytu)	Niepewność co do poprawności wyniku pomiaru	Zmienia się wskazanie. Błąd w układzie pomiarowym	Drgania wskazówki miernika, nieprawidłowe wykorzystanie przyrządu, zła widoczność
Niepewność wielkości z literatury	Brak objawów. Występuje tylko w pomiarach pośrednich	Niepewność pomiarowa wielkości z literatury lub innego źródła	Wyniki obliczenia odległości z czasu przelotu dźwięku $x = vt$, gdy v odczytuje się z literatury

3. Obliczanie niepewności pomiarów bezpośrednich

Wielkość X mierzoną bezpośrednio traktujemy jako zmienną losową. Wykonywanie pomiarów bezpośrednich jest odpowiednikiem losowania n-elementowej próbki $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ z nieskończenie licznej populacji, którą stanowią wszystkie możliwe do wykonania pomiary. Zakładamy z reguły, że populacja ma rozkład normalny $N(\mu,\sigma)$, gdzie μ oznacza wartość oczekiwaną, a σ - odchylenie standardowe. Za wynik pomiaru przyjmuje się wartość liczbową najlepszego estymatora wartości oczekiwanej, czyli średnią arytmetyczną wyników pomiarów $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Niepewnością standardową $u(x)$ wyniku pomiaru $\bar{x}$ wielkości X jest odchylenie standardowe eksperymentalne średniej arytmetycznej, które oblicza się ze wzoru $u(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$. Niepewność obliczana w ten sposób jest niepewnością standardową obliczoną metodą typu A.

Niepewność standardową szacuje się metodą typu B w przypadku, gdy dostępny jest tylko jeden wynik pomiaru albo gdy wyniki nie wykazują rozrzutu. Przyczynkami niepewności pomiarów, jak to już zostało powiedziane w paragrafie 2.2, są wtedy niepewność wzorcowania $\Delta_d x$, niepewność eksperymentatora $\Delta_e x$ oraz niepewności wyników zaczerpniętych z literatury, tablic matematycznych lub kalkulatora. Najczęściej wszystkie trzy przyczynki niepewności szacowane są na podstawie rozkładu jednostajnego i wtedy niepewność standardowa powinna być obliczona ze wzoru $u(x)=\sqrt{\frac{(\Delta_d x)^2}{3}+\frac{(\Delta_e x)^2}{3}+\frac{(\Delta_t x)^2}{3}}$.

Jeśli obydwa typy niepewności, A i B, występują równocześnie, to należy posłużyć się następującym wzorem na niepewność standardową (całkowitą):

$$u(x)=\sqrt{u_A^2(x)+u_B^2(x)}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\frac{(\Delta_d x)^2}{3}+\frac{(\Delta_e x)^2}{3}+\frac{(\Delta_t x)^2}{3}}\ .$$

4. Obliczanie niepewności pomiarów pośrednich

Najczęściej wykonuje się pomiary pośrednie i oblicza (wyznacza) wielkość mierzoną y, korzystając ze związku funkcyjnego

$$y = f(x_1, x_2, x_3,..., x_k......x_K)$$

gdzie symbole $x_1, x_2, x_3,..., x_k,.....x_K$ oznaczają K wielkości mierzonych bezpośrednio. Zakłada się, że znane są wyniki pomiarów $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3,......\bar{x}_k,......\bar{x}_K$ tych wielkości oraz ich niepewności standardowe $u(x_1)$, $u(x_2)$, $u(x_3)$,.... $u(x_k)$, ..., $u(x_K)$. Wynik (końcowy) pomiaru oblicza się ze wzoru

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3,......\bar{x}_k,......\bar{x}_K).$$

Przy obliczaniu **niepewności** standardowej **pomiaru pośredniego** należy rozróżnić nieskorelowane i skorelowane pomiary wielkości mierzonych bezpośrednio.

W pomiarach nieskorelowanych każdą wielkość mierzy się w innym, niezależnym doświadczeniu. Przykładem może być wyznaczanie prędkości $v = l/t$ sprintera na dystansie 100 m, w którym najpierw dokładnie wyznacza się długość l trasy (bieżni), a dopiero po jej wyznaczeniu z niepewnością $u(l)$ mierzy czas t z niepewnością $u(t)$. Złożoną niepewność standardową $u_c(y)$ pośrednich pomiarów nieskorelowanych oblicza się ze wzoru przybliżonego

$$u_c(y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3,......,x_k,.....,x_K)}{\partial x_k}\right)^2 u^2(x_k)}\ .$$

Wzór upraszcza się w przypadku, gdy wielkość mierzoną pośrednio można przedstawić w postaci iloczynu dowolnych potęg wielkości mierzonych bezpośrednio $y = Ax_1^{a1}x_2^{a2}.....x_k^{ak}....x_K^{aK}$ gdzie A oznacza liczbę, a $a1, a2,..., ak..., aK$ - wykładniki potęgowe (dodatnie, ujemne lub ułamkowe). Wtedy wzór na względną złożoną niepewność standardową przyjmuje postać $\frac{u_c(y)}{\bar{y}}=\sqrt{\sum_{k=1}^{K}\left(ak\frac{u(x_k)}{\bar{x}_k}\right)^2}$.

Gdy funkcja $y = f(x_1, x_2, x_3,..., x_k.......x_K)$ jest nieliniowa w znaczący sposób, wzór na $u_c(y)$ przybiera postać

$$u_c(y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3,..,x_k,...,x_K)}{\partial x_k}\right)^2 u^2(x_k)+\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\left(\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}\right]^2+\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j^2}\right)u^2(x_k)\,u(x_j)}$$

Pomiary należy uznać za skorelowane zawsze wtedy, gdy dane wielkości są mierzone bezpośrednio za pomocą jednego zestawu doświadczalnego, w jednym doświadczeniu. W praktyce oznacza to, że wszystkie pomiary elektryczne wykonywane w laboratoriach studenckich są pomiarami skorelowanymi. Nie chodzi tu o korelację między wynikami pomiarów lecz o korelację między wielkościami mierzonymi, której miarą są współczynniki korelacji. W Przewodniku jako przykład pomiaru skorelowanego podano wyznaczanie składowych *R* i *X* oporu zespolonego *Z* ($Z^2 = X^2 + R^2$) przez równoczesny pomiar przyłożonego napięcia zmiennego *u*, natężenia prądu *i* oraz przesunięcia fazowego ϕ.

W przypadku **pomiarów skorelowanych** trzeba uwzględnić korelacje zachodzące pomiędzy poszczególnymi wielkościami mierzonymi bezpośrednio. Złożona niepewność standardowa wielkości wyznaczanej (mierzonej pośrednio) wyraża się wzorem

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{K} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i+1}^{K} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}$$

gdzie $u(x_i, x_j)$ oznacza estymator kowariancji (kowariancję eksperymentalną) wielkości x_i, x_j. Wzór ten można przekształcić wprowadzając estymator współczynnika korelacji zdefiniowany wzorem

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)\, u(x_j)}.$$

Wtedy $u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{K} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i+1}^{K} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i)\, u(x_j)\, r(x_i, x_j)}$

Przewodnik zawiera również zalecenie dotyczące obliczania efektywnej liczby stopni swobody ν_{eff} (effective degrees of freedom) wyników pomiarów pośrednich nieskorelowanych. Jest to nowy element w analizie niepewności pomiarów, rzadko wspominany w podręcznikach statystyki. Efektywną liczbę stopni swobody należy obliczać ze wzoru Welcha-Sattertwaite'a $\frac{u_c^4(y)}{\nu_{eff}} = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\nu_k} \left[\frac{\partial f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..)}{\partial x_k} \right]^4$ gdzie ν_k oznacza liczbę stopni swobody wielkości oznaczonej wskaźnikiem *k*.

Z uwagi na bardzo skomplikowane obliczanie złożonej niepewności standardowej wielkości mierzonej pośrednio o skorelowanych wielkościach wejściowych (mierzonych bezpośrednio) **w pracowniach studenckich wygodniej postępować następująco**. Wyniki y_i oblicza się korzystając z kompletu wyników pomiarów bezpośrednich *K* wielkości $x_{k,i}$ uzyskanych w *i*. pomiarze. Seria wyników y_i, uzyskanych w *n* pomiarach, stanowi próbkę podobnie jak w pomiarach bezpośrednich. Przyjmuje się, że wynikiem pomiaru pośredniego jest $\overline{y}$ a złożona niepewność standardowa wyniku wynosi $u(y) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}$.

5. Niepewność rozszerzona

Dla celów komercyjnych, przemysłowych, zdrowia i bezpieczeństwa zachodzi konieczność podania miary niepewności, która określa przedział otaczający wynik pomiaru zawierający dużą, z góry określoną, część wyników, jakie można przypisać wielkości mierzonej. Niepewność spełniającą powyższy warunek nazywa się **niepewnością rozszerzoną** i oznacza symbolem $U(y)$ lub *U*. Definiuje się ją wzorem $U(y) = k\, u_c(y)$, gdzie *k* nazywa się współczynnikiem rozszerzenia. Ale liczba *k* niekoniecznie jest wartością zmiennej *t* Studenta. Jest to umownie przyjęta liczba, wybrana tak, by w przedziale $y \pm U(y)$ znalazła się większość wyników pomiaru potrzebna do danych zastosowań, na przykład na I Pracowni do wnioskowania o zgodności z wartością tabelaryczną. Wprowadzenie niepewności rozszerzonej można uważać za świadomą rezygnację z nadmiernego wyrafinowania na rzecz rozwiązania łatwiejszego do zastosowania w praktyce. Współczynnik rozszerzenia jest liczbą, w przeciwieństwie do zmiennej losowej t mającej rozkład Studenta i będącej funkcją poziomu ufności i liczby stopni swobody. W Przewodniku stwierdza się, że wartość k wynosi najczęściej 2-3. Innymi słowy, pozostawiono otwartym pytanie, czy w większości zastosowań lepsze będzie dawne kryterium 2σ czy może 3σ. Analiza dokumentów wskazuje, że wyłania się konsensus, by za konwencjonalną wartość współczynnika rozszerzenia przyjąć k = 2. Warto zacytować oficjalne stanowisko NIST: „W zgodzie z międzynarodową praktyką do obliczenia U przyjmuje się w NIST umowną wartość k = 2. Wartości k inne niż 2 mogą być stosowane tylko w przypadku szczególnych zastosowań i winny być dyktowane przez ustalone i udokumentowane wymagania". Do tych szczególnych przypadków dokument zalicza pomiar, którego niepewność złożona jest zdominowana przez pojedynczy przyczynek o małej liczbie stopni swobody (małej liczbie pomiarów). W takim przypadku zaleca się przyjąć k równe wartości funkcji t Studenta z poziomem ufności 95%.

Autor pracy [5] uważa, że istnieją głębsze powody zastąpienia pojęcia przedziału ufności przez bliskoznaczne, ale nie tożsame pojęcie niepewności rozszerzonej. Jednym z zadań nauk stosowanych (nauki techniczne, medycyna), w odróżnieniu od nauk podstawowych (fizyka, biologia), jest wypracowanie metod podejmowania decyzji, na przykład, czy poziom danego związku we krwi pacjenta wymaga podjęcia określonej kuracji. Uchylenie się od podjęcia działania nie wchodzi w grę, bo też jest decyzją! Kwazideterministyczny charakter niepewności rozszerzonej ułatwia podjęcie jednoznacznej decyzji. Na przykład obciążenie firmy karą za zanieczyszczenie środowiska następuje, jeżeli zmierzone stężenie szkodliwego związku minus niepewność rozszerzona przekracza ustaloną przepisami wartość dopuszczalną.

„Filozofia" współczynnika rozszerzenia jest też podobna do powszechnie używanego w naukach stosowanych współczynnika bezpieczeństwa. Jeżeli chcemy ustalić dopuszczalne obciążenie dla liny dźwigu, mierzymy najpierw obciążenie, przy którym zostaje ona zerwana, a następnie tak wyznaczone obciążenie dzielimy przez współczynnik bezpieczeństwa rzędu 5-15. Podobnie jest z niepewnością - obliczamy najpierw złożoną niepewność standardową a następnie, dzięki współczynnikowi rozszerzenia, znajdujemy przedział $y \pm U(y)$, w którym z potrzebnym do zastosowań stopniem pewności mieści się wartość rzeczywista. Wartość współczynnika rozszerzenia jest wielkością i tak bardziej wiarygodnie określoną niż stosowane w różnych dziedzinach techniki współczynniki bezpieczeństwa, czy jeszcze bardziej arbitralne normy zanieczyszczeń środowiska.

6. Zapisywanie wyników

Przewodnik przyjmuje zasadę raportowania niepewności z dokładnością do *dwu cyfr*. Wadą zasady zapisu dwu cyfr jest, że druga cyfra jest na ogół nieznacząca, jeżeli pierwszą jest 9, 8, 7, 6, 5. Zaletą dydaktyczną zalecenia jest jego jednoznaczność.

Spośród dwu sposobów skrótowego zapisu wartości mierzonej i niepewności, utrwala się zasada, by zapis z użyciem symbolu "±" stosować wyłącznie do niepewności rozszerzonej i innych przedziałów o wysokim poziomie ufności, natomiast zapis z użyciem nawiasów - dla niepewności standardowej (vide tab. 3).

Wynik pomiaru zapisuje się zgodnie z regułami przyjętymi w statystyce matematycznej w postaci $Y = \bar{y} \pm U(y)$, co oznacza, że najlepszym estymatorem wartości oczekiwanej wielkości Y jest $\bar{y}$ i można oczekiwać, że przedział $\bar{y} - U(y) \leq Y \leq \bar{y} + U(y)$ zawiera dużą część rozkładu wartości, które można by przypisać zmiennej losowej Y. Przedział ten można nazywać przedziałem ufności tylko w przypadku, gdy wszystkie składniki niepewności standardowej są typu A.

Przewodnik zaleca przedstawiać wyniki w taki sposób, by ich użytkownik miał możliwość powtórzenia obliczeń, a nawet pomiarów. Oto podstawowe wskazania dotyczące podawania wyników i niepewności standardowej. Należy: 1) podać pełną definicję wielkości mierzonej i wzory, z których się ją oblicza, 2) opisać sposób wykonywania pomiarów, stosowane przyrządy oraz określić ich niepewności wzorcowania, 3) podać wyniki każdej wielkości x_k mierzonej bezpośrednio, jej niepewność wzorcowania $\Delta_d x_k$, niepewność standardową $u(x_k)$ oraz liczbę pomiarów n_k, 4) podać sposoby obliczania niepewności standardowej oraz jej typ (A lub B), 5) w przypadku pomiarów pośrednich określić, czy metoda pomiaru poszczególnych wielkości mierzonych bezpośrednio daje wyniki skorelowane czy też nieskorelowane, 6) podać sposób obliczania wielkości pośredniej, 7) podać sposób planowania pomiarów końcowych, 8) podać sposób obliczania złożonej niepewności standardowej $u_c(x)$, 9) wyniki zaokrąglić według reguł dotychczas stosowanych i zapisać w jeden ze sposobów podanych w Tabeli 3.

7. Uwagi końcowe

Zgodnie z obowiązującym ustawodawstwem zasady zawarte w Przewodniku muszą zostać wdrożone do praktyki i nauczania w taki sam sposób, jak Międzynarodowy Układ Jednostek Miar SI. Trzeba będzie zatem dostosować podręczniki do laboratoriów akademickich, metrologii itp. Powinny również zakończyć się nieustanne protesty matematyków, którzy uważają za niedopuszczalne przybliżenia, uproszczenia, a nawet odstępstwa od oznaczeń stosowanych w podręcznikach statystyki matematycznej. Przykładem przedmiotu protestów jest przyjęcie rozkładu jednostajnego i estymatora odchylenia standardowego $\Delta_d x/\sqrt{3}$ jako niepewności wzorcowania przyrządów pomiarowych. Odpowiadające prawdopodobieństwo pokrycia wartości oczekiwanej w rozkładzie jednostajnym wynosi 58%, a nie 68%, jak w rozkładzie normalnym. Gdy stosuje się niepewność standardową rozszerzoną, prawdopodobieństwo to dla współczynnika rozszerzenia $k = 2$, w rozkładzie jednostajnym przekracza 100%, a w rozkładzie normalnym wynosi zaledwie około 95%.

Zalecany przez Międzynarodowa Normę sposób obliczania niepewności złożonej winien zakończyć przewlekłe spory między zwolennikami metody różniczki zupełnej i statystycznego prawa przenoszenia niepewności. Nowy rachunek niepewności, jednolity dla różnych działów nauki i techniki, będzie wkrótce uznany za umiejętność profesjonalną, potrzebną wszystkim wykonującym pomiary.

Tabela 3. Najważniejsze elementy Międzynarodowej Normy Oceny Niepewności Pomiaru

Wielkość	Symbol i sposób obliczania
Niepewność standardowa: Ocena typu A	Statystyczna analiza serii pomiarów, w tym: $u(x)$dla serii n równoważnych pomiarów $u(x)=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$, $u(a)$, $u(b)$ parametrów prostej regresji itp.
Niepewność standardowa: Ocena typu B	Naukowy osąd eksperymentatora, $u(x)=\frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$ (gdy znana jest niepewność Δx; wzorcowania $\Delta_d x$, eksperymentatora $\Delta_e x$, odczytu z tablic czy kalkulatora $\Delta_t x$
Złożona niepewność standardowa	$u_c(y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 u^2(x_k)}$ (dla nieskorelowanych x_k) K - liczba wielkości mierzonych bezpośrednio
Współczynnik rozszerzenia	$2 \le k \le 3$
Niepewność rozszerzona	$U(y) = k\, u_c(y)$
Zalecany zapis niepewności	standardowa g = 9,781 m/s^2, $u_c(g)$ = 0,076 m/s^2 g = 9,781(76) m/s^2 rozszerzona g = 9,78 m/s^2, $U(g)$ = 0,15 m/s^2 g =(9,78±0,15) m/s^2 (zasada podawania 2 cyfr znaczących niepewności)

Literatura

[1] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, OSO, Switzerland 1995.
[2] *The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty*, http://physics.nist.gov/cuu
[3] *Wyrażanie niepewności pomiaru: Przewodnik*, Główny Urząd Miar, Warszawa 1999.
[4] H. Szydłowski, POSTĘPY FIZYKI TOM 51 ZESZYT 2 ROK 2000, str. 92.
[5] A. Zięba, POSTĘPY FIZYKI TOM 52 ZESZYT 5 ROK 2001, str. 238.
[6] H. Szydłowski, *Niepewności w pomiarach. Międzynarodowe standardy w praktyce*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001.
[7] *Teoria pomiarów*, red. H. Szydłowski, PWN, Warszawa 1984.