Wyrażanie niepewności pomiaru

Andrzej Kubiaczyk
Wydział Fizyki, Politechnika Warszawska

Warszawa, 2011

Informacje wstępne

Każdy pomiar wielkości fizycznej dokonywany jest ze skończoną dokładnością, co oznacza, że wynik tego pomiaru dokonywany jest z **niepewnością pomiarową**. Fakt ten związany jest nie tylko z niedoskonałością działań człowieka, lecz także z niedoskonałością wykonania przyrządów pomiarowych, przypadkowym stanem materii w chwili dokonywania pomiaru, wpływem procesu pomiarowego na wielkość mierzoną oraz przybliżonym charakterem modeli rzeczywistości opisywanych w postaci praw fizyki. Zasady obliczania i szacowania niepewności pomiarowych, a także oceny wyników pomiarów zawarte są w normie opublikowanej w 1995 roku przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO). Wersja polska wydana w roku 1999 przez Główny Urząd Miar nosi nazwę „***Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik***". Stanowi ona podstawę opracowania instrukcji określania niepewności pomiarów wykorzystywanej w Laboratorium Fizyki.

Najważniejsze elementy obowiązujących norm

- Rozróżnienie między *„niepewnością pomiarów”* a *„błędami”* w potocznym tego słowa znaczeniu
- Przyjęcie jednolitej terminologii
- Konsekwentne stosowanie metod statystycznych
- Podział składników niepewności na dwie kategorie zależne od sposobów obliczania ich wartości (typ A i typ B)
- Dokładny opis metod określania niepewności pomiarów
- Określenie konwencji zapisu wyników i niepewności pomiarów
- **Cel: możliwość jednoznacznej interpretacji wyników pomiarów wykonywanych w różnych miejscach i w różnym czasie na całym świecie**

Źródła niepewności

- Niepewności związane z niepełną definicją wielkości mierzonej
- Niepewności związane z wykonywaniem pomiarów:
  - niedoskonały układ pomiaru wielkości mierzonej
  - niereprezentatywne pomiary
  - niepełna znajomość oddziaływań otoczenia na pomiar
  - błędy obserwatora w odczytywaniu wskazań przyrządów
  - przybliżenia i założenia upraszczające tkwiące w metodzie i procedurze pomiarowej
  - zmiany kolejnych wyników pomiarów wielkości mierzonej w pozornie identycznych warunkach
- Niepewności związane z przyrządami pomiarowymi:
  - skończona zdolność rozdzielcza przyrządów
  - niedokładne wartości przypisane wzorcom i materiałom odniesienia

Rodzaje pomiarów

- **Pomiar bezpośredni** – wielkość mierzoną porównuje się ze wzorcem lub pomiar wykonywany przy użyciu jednego przyrządu
  - Seria pomiarowa
  - Błąd „gruby"

- **Pomiar pośredni** – na podstawie pomiarów bezpośrednich jednej lub kilku wielkości fizycznych oblicza się wielkość od nich zależną (na podstawie znanej zależności funkcyjnej)

Główne pojęcia (1)

- **Niepewność pomiaru (*uncertainty*)** – parametr, związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.
  - niepewność = wątpliwość
  - niepewność + przymiotnik = miara ilościowa tego pojęcia
- **Niepewność standardowa (*standard uncertainty*) *u(x)*** – niepewność wyniku pomiaru wyrażona w formie odchylenia standardowego (estymator wariancji) (na przykład odchylenie standardowe średniej).
  Zapis: *u*, *u(x)* lub *u*(nazwa).
  u nie jest funkcją, tylko liczbą!

Główne pojęcia (2)

- **Obliczanie niepewności standardowej - metoda typu A (*type A evaluation of uncertainty*)** – metoda obliczania niepewności pomiaru na drodze analizy statystycznej serii wyników pomiarów.
- Wynik pomiaru: wartość średnia

$$x \equiv \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

  - Założenia:
    - prawdopodobieństwo występowania wyników mniejszych i większych od średniej jednakowe
    - im większe odchylenie od średniej, tym mniejsze prawdopodobieństwo wystąpienia pomiaru
  - Wynik: Im większa liczba pomiarów, tym bardziej wykres rozrzutu pomiarów podobny jest do rozkładu Gaussa (rozkład gęstości prawdopodobieństwa).
- Przykłady: obliczanie odchylenia standardowego średniej dla serii niezależnych obserwacji albo użycie najmniejszej sumy kwadratów w celu dopasowania krzywej do danych i obliczenie parametrów krzywej oraz ich niepewności standardowych.

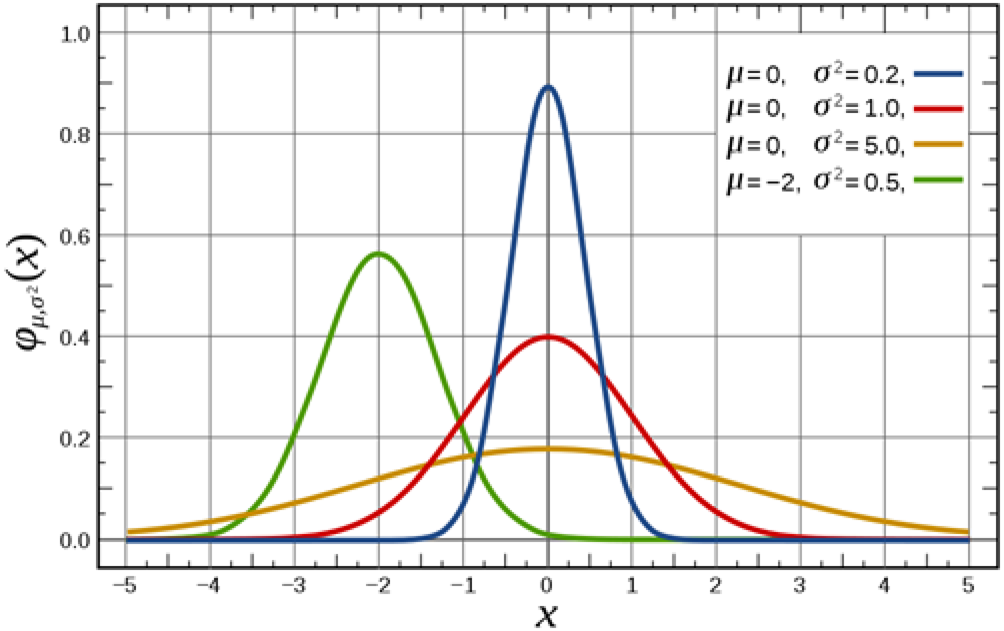
Rozkład Gaussa

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}\right)$$

μ – wartość oczekiwana

σ – odchylenie standardowe

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$$



$$\int_{-\sigma}^{+\sigma}\varphi(x)dx=0{,}683$$

$$\int_{-3\sigma}^{+3\sigma}\varphi(x)dx=0{,}997$$

$$\int_{-2\sigma}^{+2\sigma}\varphi(x)dx=0{,}954$$

Rozkład Gaussa dla skończonej liczby pomiarów: wartością oczekiwana jest średnia arytmetyczna, a odchyleniem standardowym odchylenie standardowe wartości średniej.

Niepewność standardowa obliczana metodą typu A jest równa odchyleniu standardowemu średniej

$$u(x)=\sqrt{s_{\bar{x}}^2}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

Główne pojęcia (3)

- **Obliczanie niepewności standardowej - metoda typu B (*type B evaluation of uncertainty*)** – metoda obliczania niepewności pomiaru sposobami *innymi* niż analiza statystyczna serii pomiarowej, czyli na drodze innej niż metoda typu A. Oparta jest zwykle oparta o naukowy osąd eksperymentatora biorącego pod uwagę wszystkie dostępne informacje (wiedza o przyrządach, badanym materiale, itp.)
  - Założenie: prawdopodobieństwo uzyskania wyniku mieszczącego się w przedziale wyznaczonym przez wynik i niepewność wzorcowania jest stałe – rozkład jednostajny
  - niepewność wzorcowania Δx
  - niepewność eksperymentatora Δx_e

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}$$

- Prawo propagacji niepewności

$$u(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_e)^2}{3}}$$

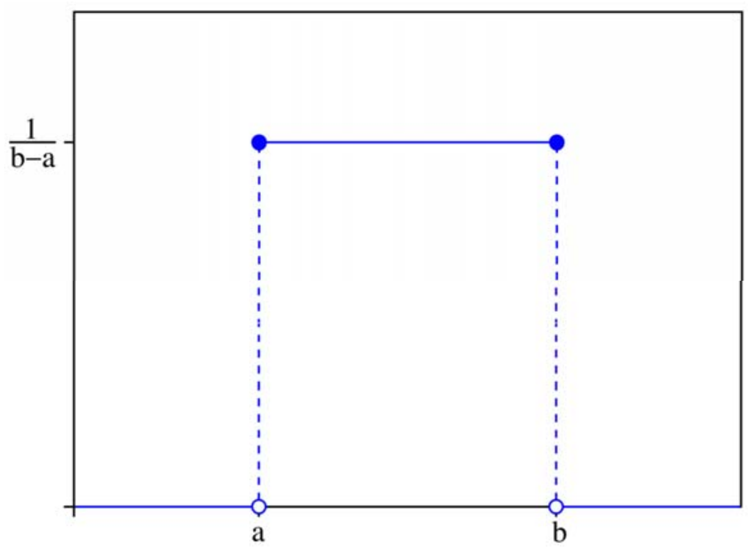
Rozkład jednostajny

- Gęstość prawdopodobieństwa w przedziale od *a* do *b* jest stała i różna od zera, a poza nim równa zeru
- Funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu jednostajnego:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{3}} \qquad -\sigma\sqrt{3} \le x - \mu \le \sigma\sqrt{3}$$

$$\varphi(x) = 0 \qquad dla \quad pozostalych \quad x$$

- Wartość oczekiwana: $\mu = \frac{a+b}{2}$
- Wariancja: $\sigma = \frac{(b-a)^2}{12}$



Niepewność standardowa obliczana metodą typu B jest równa odchyleniu standardowemu

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}$$

Główne pojęcia (4)

- **Złożona niepewność standardowa (*combined standard uncertainty*) $u_c(x)$** – niepewność standardowa wyniku pomiaru określana, gdy wynik ten jest otrzymywany ze zmierzonych bezpośrednio innych wielkości (niepewność pomiarów pośrednich obliczana z prawa przenoszenia niepewności pomiaru).
  - Pomiary o wielkościach wejściowych skorelowanych
  - Pomiary o wielkościach wejściowych nieskorelowanych

Główne pojęcia (5)

- **Niepewność rozszerzona (*expanded uncertainty*)** $U(x)$ lub $U_c(x)$ – wielkość określająca przedział wokół wyniku pomiaru, od którego oczekuje się, że obejmuje przeważającą część wyników (wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać wielkości mierzonej).
  - Niepewność standardowa $u(x)$ wyznacza przedział znalezienia wartości prawdziwej
    - Niepewność typu A: prawdopodobieństwo 68%
    - Niepewność typu B: prawdopodobieństwo 58%
  - Cel wprowadzenia niepewności rozszerzonej:
    - Porównywanie wyników uzyskanych w różnych laboratoriach
    - Porównanie z wartością tablicową lub teoretyczną
    - Do celów komercyjnych
    - Do ustalania norm przemysłowych, zdrowotnych, bezpieczeństwa

Główne pojęcia (6)

- **Współczynnik rozszerzenia (*coverage factor*)** k –współczynnik liczbowy, mnożnik niepewności standardowej, stosowany w celu uzyskania niepewności rozszerzonej.
  k zawiera się w granicach od 2 do 3.
  Dla większości zastosowań, w tym w praktyce laboratoryjnej, zaleca się przyjęcie wartości $k = 2$.
  - Niepewność rozszerzona $U(x)$ wyznacza przedział znalezienia wartości prawdziwej
    - Niepewność typu A: prawdopodobieństwo 95%
    - Niepewność typu B: prawdopodobieństwo bliskie 100%

$$U(x) = k \cdot u(x)$$

Obliczanie niepewności standardowej typu B (1)

Zakres pomiarowy – największa wartość jaką może zmierzyć przyrząd pomiarowy przy określonym ustawieniu pokrętła (klawisza, przycisku,…) wyboru zakresu.

Klasa przyrządu dokładność z jaką przyrząd pomiarowy przekształca sygnał pomiarowy na wskazanie odczytywane przez obserwatora. Klasa przyrządu jest podawana przez producenta w procentach **zakresu pomiarowego**.

Niepewność wzorcowania:

$$\Delta x = \frac{klasa \cdot zakres}{100}$$

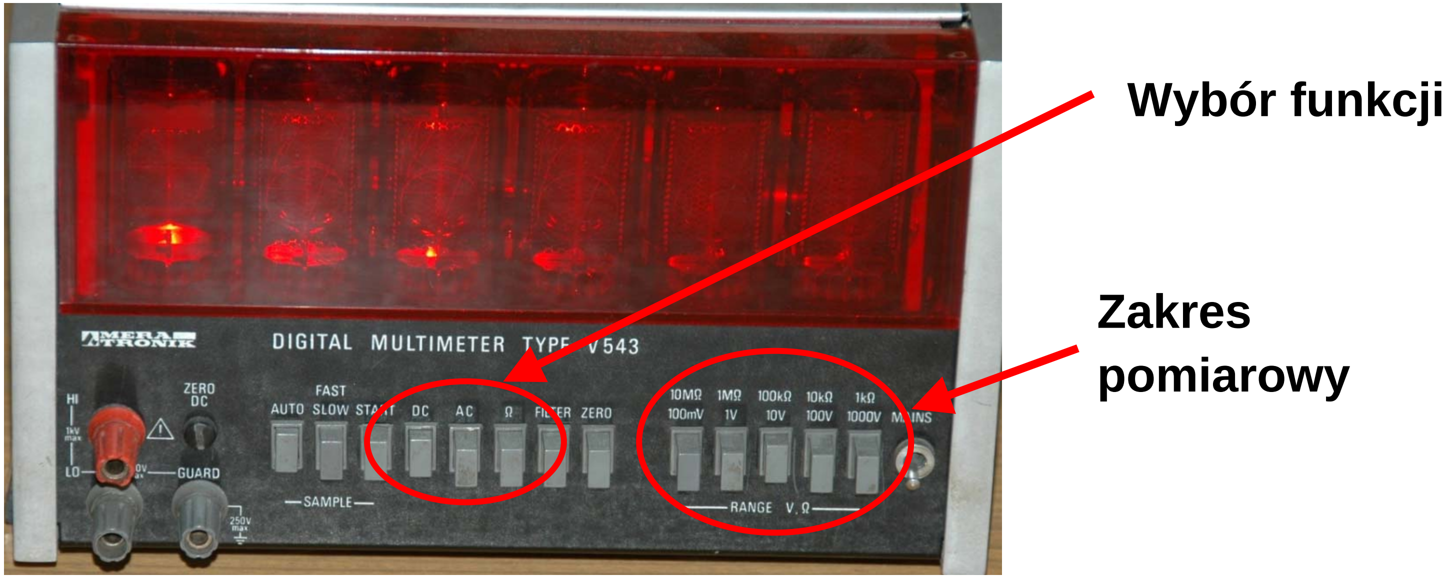
Niepewność obserwatora:

$$\Delta x_e = \frac{zakres}{liczba\ \ dzialek}$$

Obliczanie niepewności standardowej typu B (2)

- Niepewność pomiaru dla mierników elektronicznych (cyfrowych):
  - x – wielkość mierzona
  - z – zakres pomiarowy
  - c_1, c_2 – współczynniki dla danego przyrządu

$$\Delta x = c_1 x + c_2 z$$



Pomiary bezpośrednie

- Obliczanie niepewności typu A
  - Wynik pomiaru – średnia arytmetyczna
  - Niepewność standardowa – odchylenie standardowe wielkości średniej

$$x \equiv \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$u(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

- Obliczanie niepewności typu B
  - Niepewność wzorcowania Δx
  - Niepewność eksperymentatora Δx_e

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}$$

- Składanie niepewności (prawo propagacji niepewności)

$$u(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_e)^2}{3}}$$

Pomiary pośrednie

- Wykonać pomiary k wielkości mierzonych bezpośrednio

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

- Wyznaczyć wartości średnie wielkości mierzonych bezpośrednio i niepewności standardowe (mogą być obliczane metodą typu A i typu B)

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$$

$$u(x_1),\, u(x_2),\, \ldots\, ,\, u(x_k)$$

- Obliczyć wynik pomiaru

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$$

- Obliczyć niepewność złożoną

$$u_c(z) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j} \right)^2 u^2(x_j)}$$

- Przykład: dla **dwóch** zmiennych (często spotykany przypadek w laboratorium)

$$u_c(z) = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)^2 u^2(y)}$$

Zapis wyników pomiaru

- **Maksymalnie 2 cyfry znaczące**
- **Zaokrąglanie zgodnie z zasadami matematyki**

  - **Niepewność standardowa**
    $t = 21{,}364$ s, $u(t) = 0{,}023$ s
    $t = 21{,}364(23)$ s, sposób zalecany
    $t = 21{,}364(0{,}023)$ s

  - **Niepewność rozszerzona**
    $t = 21{,}364$ s, $U(t) = 0{,}046$ s ($k = 2$) $n = 11$
    $t = (21{,}364 \pm 0{,}046)$ s. sposób zalecany

Przykłady prawidłowego zapisu wyniku pomiaru

Wynik pomiarów i obliczeń	Prawidłowy zapis
a = 321,735 m/s; $u(a)$ = 0,24678 m/s	a = 321,74 m/s; $u(a)$ = 0,25 m/s a = 321,74(0,25) m/s a = 321,74(25) m/s
b = 321785 m; $u(b)$ = 1330 m	b = 321800 m; $u(b)$ = 1300 m b = 321800(1300) m $b = 321{,}8(1{,}3) \cdot 10^3$ m b = 321,8(1,3) km
C = 0,0002210045 F; $u_c(C)$ = 0,00000056 F	C=0,00022100 F; $u_c(C)$=0,00000056 F $C = 221{,}00(0{,}56) \cdot 10^{-6}$ F $C = 221{,}00(56) \cdot 10^{-6}$ F C = 221,00(56) μF
T = 373,4213 K; $u(T)$ = 2,3456 K	T = 373,4 K; $u(T)$ = 2,3 K T = 373,4(2,3) K **$U(T)$ = 4,7 K** **T = (373,4 ± 4,7) K**

Metoda najmniejszych kwadratów (1)

- **Cel:** weryfikacja, czy wielkości zmierzone zależą od siebie w sposób opisany teoretycznie
- **Założenie:** każdą zależność fizyczną można sprowadzić do zależności liniowej **y = a + b x**
- **Metoda:** najmniejszych kwadratów – znalezienie prostej, dla której suma kwadratów odległości punktów pomiarowych od tej prostej jest najmniejsza, czyli mówiąc potocznie leżącej „najbliżej" punktów pomiarowych
- **Wyniki obliczeń:** **a**, **b** oraz **niepewność u(a)** i **niepewność u(b)** (niepewności standardowe obliczane metodą typ A wartości a i b)

Metoda najmniejszych kwadratów (2)

y = ax + b

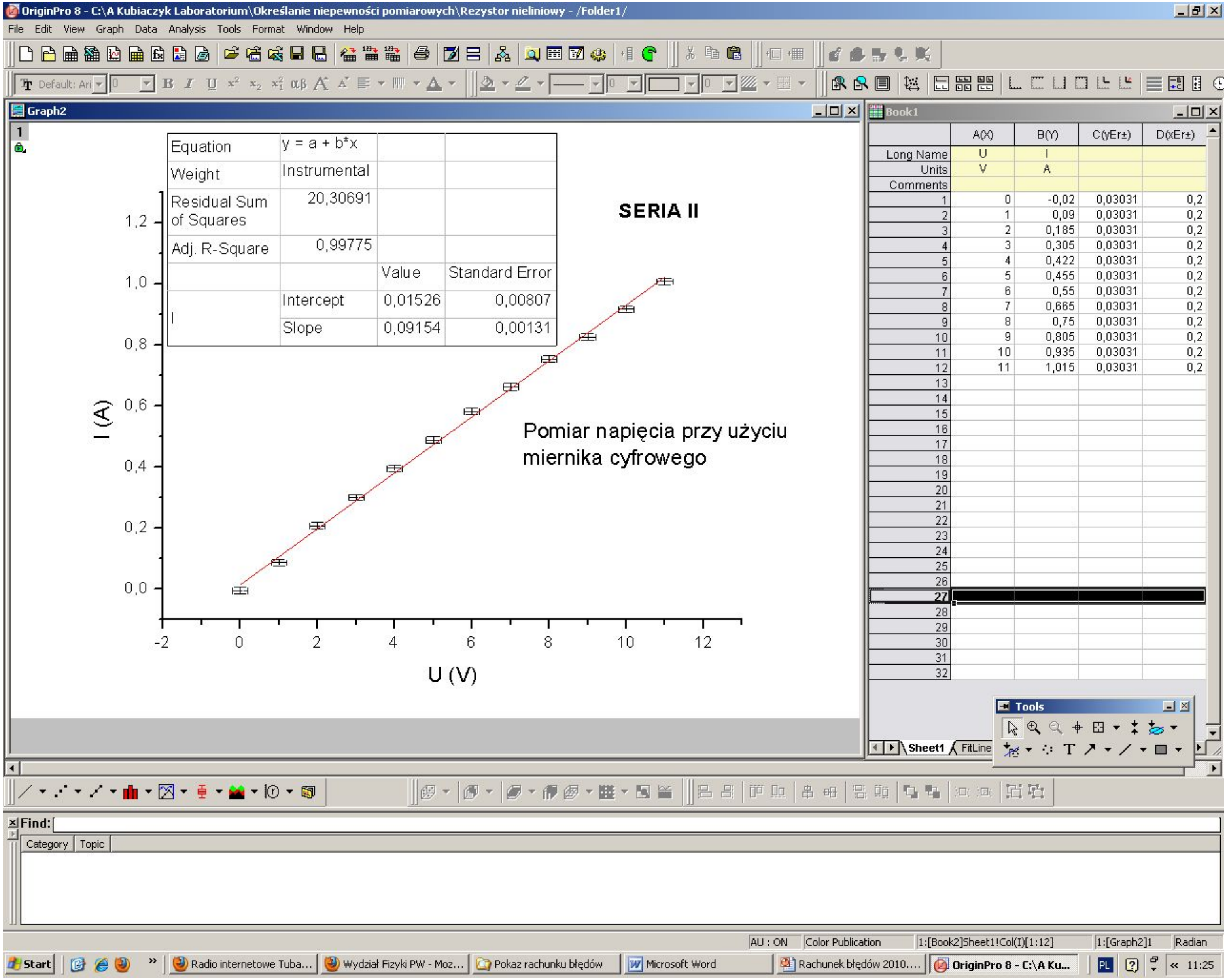
$$\tilde{x}_i = x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^2} \qquad \bar{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{\bar{a}}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\tilde{d}_i = y_i - \bar{a}\tilde{x}_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$s_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\,\frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{d}_i^{\,2}}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^{\,2}}} \qquad s_{\bar{b}} = s_{\bar{a}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^{\,2} + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

Metoda najmniejszych kwadratów (3)



Weryfikacja hipotezy liniowości

- Metoda najmniejszych kwadratów
  - Współczynnik korelacji bliski 1 (niewielka użyteczność)
- Wykres funkcji
  - Prosta powinna przeciąć co najmniej 2/3 odcinków niepewności punktów pomiarowych
- Testy statystyczne
  - Test χ^2 (chi-kwadrat)

Test χ^2

- Zmienna testowa χ^2
  - Definicja
  - Waga statystyczna
  - Przypadek dla funkcji liniowej

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - y(x_i))^2$$

$$w_i = [u(y_i)]^{-2}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - B(x_i) - A)^2$$

- Poziom istotności α – prawdopodobieństwo odrzucenia założonej hipotezy
  - Liczba z zakresu od 1 do 0
  - Wybór zależy od obserwatora (zazwyczaj przyjmuje się wartość 0,05)
  - Zależność od liczby stopni swobody (liczba pomiarów odjąć liczba wyznaczanych parametrów)

- Wartość krytyczna $\chi^2_{\mathbf{krytyczna}}$ (odczytana z tabeli)

- Porównanie wartości krytycznej i doświadczalnej
  - $\chi^2 \leq \chi^2_{krytyczna}$ **- brak podstaw do odrzucenia hipotezy**
  - $\chi^2 > \chi^2_{krytyczna}$ **- odrzucić hipotezę o liniowej zależności**

Test χ^2 w programie Origin

- \- *Equation* (równanie) – funkcja, którą dopasowano do zbioru danych. W przykładzie jest to równanie liniowe $y = a + b*x$.
- \- *Weight* (waga) – sposób obliczania wagi statystycznej pomiaru. *Instrumental* oznacza, że waga w_i obliczana jest jako kwadrat odwrotności niepewności pomiaru y_i (wielkość pobierana z kolumny niepewności wielkości *Y*).
- \- *Residual Sum of Squares* – jest to wartość funkcji χ^2 (aby ta wartość została wyświetlona w tabelce z wynikami, konieczne jest zaznaczenie opcji *Residual Sum of Square* w *Quantities to Compute>Fit statistics* w oknie parametrów dopasowania liniowego (*Fit Linear*)).
- \- *Adj. R-Square* (normowany współczynnik determinacji) – podstawowa miara dopasowania modelu. Im bliższy jedności, tym dopasowanie do modelu bliższe.
- \- *Value* (wartość) i *Standard Error* (niepewność standardowa) dla wielkości a i b.
- \- *Intercept* (wyraz wolny *a*) i *Slope* (współczynnik kierunkowy *b*).