

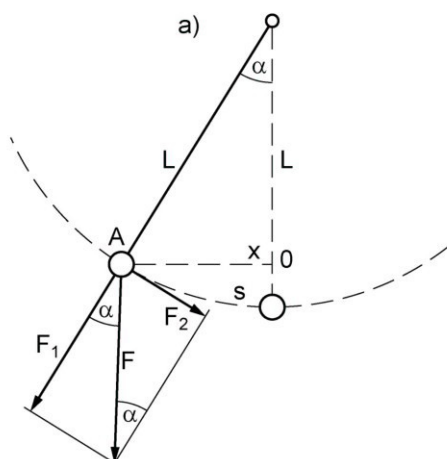
WYZNACZANIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO ZA POMOCĄ WAHADŁA PROSTEGO

Przykładem dobrze znanego ruchu ze stałym (prawie) przyspieszeniem jest swobodny spadek ciał na Ziemię. Przyspieszenie w takim ruchu nazywamy przyspieszeniem ziemskim i tradycyjnie oznaczamy symbolem „ g ”. Stwierdzono, że gdy nie występuje opór powietrza, wszystkie ciała niezależnie od ich kształtu, masy i składu chemicznego w tym samym miejscu nad powierzchnią Ziemi spadają z przyspieszeniem o takiej samej wartości. W rzeczywistych ziemskich warunkach naturalnych tylko swobodny spadek ciał o dużej gęstości masy można z dobrym przybliżeniem traktować jako swobodny.

Wartość przyspieszenia ziemskiego nie jest stała, ale zależy od położenia miejsca na powierzchni Ziemi. Głównymi przyczynami tego zjawiska są: a) spłaszczenie kuli ziemskiej, b) ruch obrotowy Ziemi. Wskutek działania tych dwóch czynników g może przyjmować wartość od ok. $9,780 \text{ m/s}^2$ na równiku, do ok. $9,832 \text{ m/s}^2$ na biegunie. Jak wynika z prawa powszechnego ciężenia, g również zmienia wartość wraz z wysokością, czyli ze zmianą odległości od środka Ziemi. Przykładowo na powierzchni Ziemi w miejscu znajdującym się na szerokości geograficznej 45° , g ma wartość ok. $9,806 \text{ m/s}^2$, ale już na wysokości około 16 km nad tym miejscem wartość g maleje do ok. $9,757 \text{ m/s}^2$.

Analizy wyników pomiarów wartości przyspieszenia ziemskiego stanowią podstawowe źródło informacji o kształcie Ziemi. Wyznaczenie wartości g wprost z pomiarów swobodnego spadku ciał nie daje wyników o żądanej dokładności. Najdokładniejsze metody pomiaru oparte są na obserwacji orbit sztucznych satelitów. Do stosunkowo prostych zestawów pomiarowych pozwalających wyznaczyć wartość g z zadowalającą dokładnością, można zaliczyć układ doświadczalny z tzw. wahadłem prostym.

Wahadłem matematycznym nazywamy układ złożony z punktu materialnego o masie m zawieszono na nieskończenie cienkiej, nierozciągliwej i nieważkiej nici o długości L (Rys. 1.). Idealna konstrukcja wahadła matematycznego powoduje, że masa wahadła skupiona jest w punkcie materialnym, a jego ruch może odbywać się bez oporu, niezależnie od warunków środowiska.



Rys.1. Rozkład sił działających na punkt materialny wahadła matematycznego w chwili wychylenia o kąt α względem położenia równowagi.

Początkowo znajdujące się w położeniu równowagi i nieruchome wahadło matematyczne, po wytrąceniu z tego stanu będzie wykonywać cyklicznie powtarzający się ruch wahadłowy. Przyczyną tego ruchu jest składowa styczna F_2 siły ciężkości $F = mg$, skierowana stycznie do toru ruchu (Rys. 1.). Widoczna na rysunku składowa radialna F_1 dostarcza niezbędnego przyspieszenia dośrodkowego wymuszającego ruch punktu materialnego po łuku okręgu s . Składowa F_2 jest siłą przywracającą równowagę układu i sprowadza masę m do położenia równowagi. Siła ta jest równa:

$$F_2 = -F \cdot \sin\alpha = -m \cdot g \cdot \sin\alpha \quad (1)$$

Znak „-” uwzględnia fakt, że F_2 jest skierowana przeciwnie do kierunku wychylenia x .

Widzimy, że siła F_2 zależy od wielkości wychylenia wahadła z położenia równowagi, i w szerokim zakresie zmian α wartość jej zmienia się w sposób nieliniowy, przez co analityczny opis takiego ruchu jest bardzo złożony.

Wprowadzając uproszczenie, polegające na ograniczeniu przestrzeni dostępnej dla ruchu wahadła do wychyleń o wartościach z przedziału tzw. małych kątów (nie przekraczających 5°), do opisu ruchu wahadła można z dobrym przybliżeniem uznać równość $\sin\alpha = \alpha$ (dla $\alpha=5^\circ$ (0.0873 radianów) względna

różnica wartości α i $\sin(\alpha)$ nie przekracza 0,11%). Konsekwencją zastosowanego ograniczenia jest możliwość dokonania kolejnego przybliżenia $x \cong s$, wartości x wychylenia liniowego i długości łuku s , a to pozwala rozpatrywać ruch masy m po torze bardzo zbliżonym do prostoliniowego.

Przyjmując powyższe ograniczenie, można dokonać uproszczenia wyrażenia (1):

$$F_2 = -m \cdot g \cdot \sin\alpha = -m \cdot g \cdot \frac{x}{L} \quad (2)$$

Wymuszone działaniem siły F_2 równanie ruchu masy m ma postać:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m \cdot g}{L} \cdot x \quad (3)$$

Obecny po prawej stronie powyższego równania czynnik $\frac{m \cdot g}{L}$ ma wartość niezmienną dla danego wahadła. Wprowadzając za ten czynnik pomocniczą stałą k , równanie (3) przepisujemy do nowej postaci:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x \quad (4)$$

$$k = \frac{m \cdot g}{L} \quad (4a)$$

Równanie (4) wskazuje, że wahadło wykonuje prosty (nietłumiony) ruch harmoniczny, którego rozwiązaniem, przy spełnieniu założenia (5a), jest $x_{(t)}$ - zależna od czasu funkcja (5) położenia masy m :

$$x_{(t)} = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (5)$$

$$m \cdot \omega^2 = k \quad (5a)$$

w którym: A – jest amplitudą ruchu,
 ω – częstością drgań swobodnych,
 φ - jest fazą początkową ruchu.

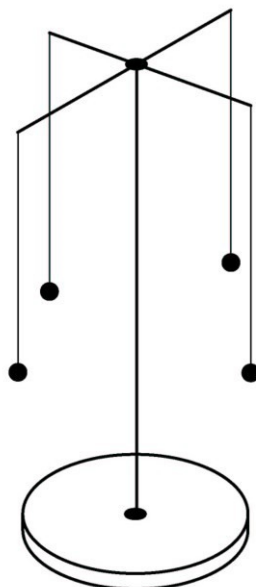
Porównując odpowiednie strony wyrażen (4a) i (5a) i mając na uwadze że $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$, otrzymujemy związek między okresem T drgań wahadła matematycznego a jego długością L :

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (6)$$

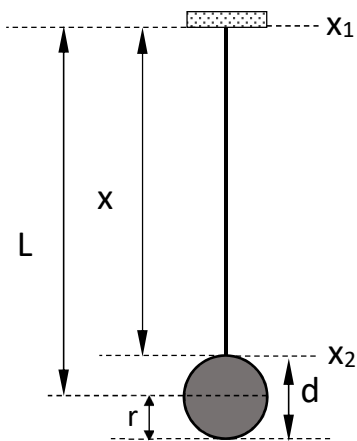
Rzeczywistą realizację idei wahadła matematycznego nazywamy wahadłem prostym, które musi być wykonane w taki sposób, że użyta do jego budowy cienka nić będzie nieco rozciągliwa i posiadać masę, natomiast zawieszona na tej nici mała kulka, najczęściej wykonana z jednorodnego metalu, musi posiadać skończoną wartość średnicy. Budując wahadło proste zabiega się o to, by stosunek masy nici do masy kulki był pomijalnie mały, co pozwala przyjąć że środek masy wahadła znajduje się w miejscu geometrycznego środka kulki. W rozsądnie krótkich przedziałach czasowych i w zakresie niewielkich prędkości poruszania się kulki i nici w środowisku z powietrzem, ruch wahadła prostego można z dobrym przybliżeniem traktować jak ruch wahadła matematycznego. Jest oczywistym, że otrzymanie wartościowych wyników pomiarów z użyciem wahadła prostego i ich ilościowej analizy z użyciem zależności (6), wymaga od eksperymentatora spełnienia warunków wprowadzonych wyżej ograniczeń.

UKŁAD DOŚWIADCZALNY

Do pomiarów przygotowano zestaw wahadeł prostych o zróżnicowanych długościach x nici, składających się z kulek o różnych średnicach d , wykonanych z materiałów o różnych gęstościach masy. Wahadła zamocowano na wspólnym statywie, co ilustruje Rys. 2. Geometryczne wielkości charakteryzujące dowolne wahadło zaznaczono na Rys. 3.



Rys. 2. Schemat doświadczonego układu wahadeł prostych.



Rys. 3. Geometryczne parametry x i d wahadła prostego oraz oznaczenia położenia x_1 i x_2 końców nici. r - promień kulki ($d = 2 \cdot r$).

WYKONANIE POMIARÓW

1. Dokonać pionizacji katetometru z użyciem śrub regulacyjnych znajdujących się w podstawie i pionu zwisającego wzdłuż skali.
2. Obserwując przez obiektyw lunetki wahadło przesunąć ją na skali katetometru do pozycji, w której środek krzyża nici pajęczych (widoczny w jej wnętrzu) pokryje się z początkiem nici. Ze skali odczytać położenie x_1 . Postępując analogicznie zmierzyć położenie x_2 końca nici. W Tabeli Pomiarów zapisać odczytane wartości, a pod tabelą zanotować niepewność wzorcowania oraz oszacowaną przez mierzącego niepewność eksperymentatora.
3. Do pomiaru średnicy d kulki użyć suwmiarki. Wykonać co najmniej 5 pomiarów średnicy dbając o to, by kolejny pomiar wykonać dla innej części kulki. Wyniki pomiarów zapisać w Tabeli Pomiarów, natomiast pod tabelą zanotować niepewność wzorcowania.
4. Mając na względzie wprowadzone w części teoretycznej ograniczenia, wprawić wahadło w ruch drgający. Przez chwilę obserwować kulkę, sprawdzając czy porusza się w jednej płaszczyźnie drgań. Dopiero po nabraniu pewności że tak jest, nie zatrzymując wahadła, włączyć stoper w chwili jego maksymalnego wychylenia i odmierzać czas t_n zliczając kolejne cykle n drgań. W Tabeli Pomiarów zapisać liczbę drgań n (jednakową dla danej serii pomiarów) i odpowiadający im czas t_n . Pomiar powtórzyć 3 – 5 razy. Pod Tabelą pomiarów zanotować niepewności związane z pomiarem czasu drgań t_n : wzorcowania i eksperymentatora.
5. Pomiary z pkt. 2-4 wykonać dla pozostałych wahadeł.

TABELA POMIARÓW

Wahadło materiał kulki	Położenie początku nici	Położenie końca nici	Średnica kulki	Liczba pełnych wahnięć	Czas pełnych wahnięć
	x_1	x_2	d_i	n	t_n
	[mm]	[mm]	[mm]	[-]	[s]
1 kulka:					
2 kulka:					
3 kulka:					
4 kulka:					

$$\Delta_d(x_1) = \Delta_d(x_2) = \dots \dots \dots [mm]$$

$$\Delta_d(t_n) = \dots \dots \dots [s]$$

$$\Delta_e(x_1) = \Delta_e(x_2) = \dots \dots \dots [mm]$$

$$\Delta_e(t_n) = \dots \dots \dots [s]$$

$$\Delta_d(d) = \dots \dots \dots [mm]$$

OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

- Wykonać z omówieniem przykład oszacowania rozszerzonej ($k = 2$) całkowitej niepewności położenia końców nici $U(x_1)$ i $U(x_2)$:

$$U(x_1) = U(x_2) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(x_1))^2 + (\Delta_e(x_1))^2}{3}} \quad (7)$$

- Dla jednego z badanych wahadeł wykonać przykład obliczenia średniej wartości średnicy d kulki:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^p d_i}{p} \quad (8)$$

p jest równe długości serii pomiarów średnicy kulki wahadła.

- Dla jednego z badanych wahadeł wykonać z omówieniem przykład oszacowania rozszerzonej ($k = 2$) niepewności $U(d)$, jako wielkości złożonej uwzględniającej metody typu A i typu B:

$$U(d) = k \cdot \sqrt{(\Delta_d(d))^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^p (d_i - d)^2}{\sqrt{3} \cdot p \cdot (p-1)}\right)^2} \quad (9)$$

- Dla jednego z badanych wahadeł wykonać przykład obliczenia długości L :

$$L = |x_2 - x_1| + \frac{d}{2} \quad (10)$$

5. Dla jednego z badanych wahadeł wykonać z omówieniem przykład oszacowania niepewności $u(L)$:

$$u(L) = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x_1} U(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial x_2} U(x_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial d} U(d)\right)^2} =$$

$$\sqrt{(1 \cdot U(x_1))^2 + (1 \cdot U(x_2))^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot U(d)\right)^2} =$$

$$\sqrt{2 \cdot (U(x_1))^2 + \frac{(U(d))^2}{4}} \quad (11)$$

6. Dla jednego z badanych wahadeł wykonać z omówieniem przykład oszacowania rozszerzonej ($k = 2$) całkowitej niepewności $U(t_n)$:

$$U(t_n) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta d(t_n))^2 + (\Delta e(t_n))^2}{3}} \quad (12)$$

7. Dla jednej z wartości czasu t_n dowolnego wahadła wykonać przykład obliczenia okresu wahadła T_i :

$$T_i = \frac{t_n}{n} \quad (13)$$

8. Wykonać przykład oszacowania niepewności $u(T_i)$:

$$u(T_i) = \sqrt{\left(\frac{\partial T_i}{\partial t_n} U(t_n)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} U(t_n)\right)^2} = \frac{U(t_n)}{n} \quad (14)$$

9. Wykonać pozostałe obliczenia, a otrzymanymi wynikami uzupełnić Tabelę Wyników 1. W działaniach arytmetycznych i zapisach wyników zwracać szczególną uwagę na podane w tabelach jednostki wielkości fizycznych.

TABELA WYNIKÓW 1

Wahadło	x_1	x_2	$u(x)$	d_i	d	$U(d)$	n	t_n	$U(t_n)$	T_i	$u(T_i)$
	[m]	[m]	[m]	[10 ⁻³ m]	[10 ⁻³ m]	[10 ⁻³ m]	[-]	[s]	[s]	[s]	[s]
1											
2											
3											
4											

10. Dla dowolnego wahadła wykonać przykład obliczenia średniej wartości okresu wahadła T :

$$T = \frac{\sum_{i=1}^k T_i}{k} \quad (15)$$

k jest równe długości serii pomiarów czasu drgań wahadła.

11. Dla dowolnego wahadła wykonać przykład oszacowania niepewności średniego okresu drgań $u(T)$, jako wielkości złożonej uwzględniającej metody typu A i typu B:

$$u(T) = \sqrt{(u(T)_A)^2 + (u(T)_B)^2} = \sqrt{(u(T_i))^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^k (T_i - T)^2}{\sqrt{3} \cdot k \cdot (k-1)}\right)^2} \quad (16)$$

12. Dla dowolnego wahadła wykonać przykład obliczenia wartości przyspieszenia g :

$$g = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{L}{T^2} \quad (17)$$

13. Wykonać przykład oszacowania niepewności $u(g)$:

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial L} u(L)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} u(T)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} u(L)\right)^2 + \left(-\frac{8 \cdot \pi^2 \cdot L}{T^3} u(T)\right)^2} = g \cdot \sqrt{\left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot u(T)}{T}\right)^2} \quad (18)$$

14. Wykonać obliczenia dla pozostałych wahadeł i uzupełnić wynikami Tabelę Wyników 2.

TABELA WYNIKÓW 2

Wahadło	L	$u(L)$	T	$u(T)$	g	$u(g)$
	[m]	[m]	[s]	[s]	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
1						
2						
3						
4						

15. Dokonać oceny wpływu długości nici i materiałów kulek użytych wahadeł prostych na jakość otrzymanych wyników końcowych. W celu ilościowej oceny jakości wykonania pomiarów pośrednich i zastosowanej metody porównać otrzymane wartości g z wartością oczekiwaną dla szerokości geograficznej miasta Opole. W przypadku trudności z podaniem wartości g dla Opola, użyć wartości wyznaczonej dla Krakowa lub Wrocławia.

LITERATURA

- [1] HALLIDAY D., RESNICK R., WALKER J.: Podstawy fizyki, cz. 2, PWN, Warszawa 2003.
- [2] SZYDŁOWSKI H.: Pracownia fizyczna, PWN, Warszawa 1994.
- [3] ZIĘBA A. (red.): Pracownia fizyczna Wydziału Fizyki i Techniki Jądrowej, cz.1, Skrypty Uczelniane nr 1529, Wydawnictwa AGH, Kraków 1999.
- [4] Ćwiczenia Laboratoryjne z Fizyki (praca zbiorowa), Skrypt Nr 279, Politechnika Opolska 2007.