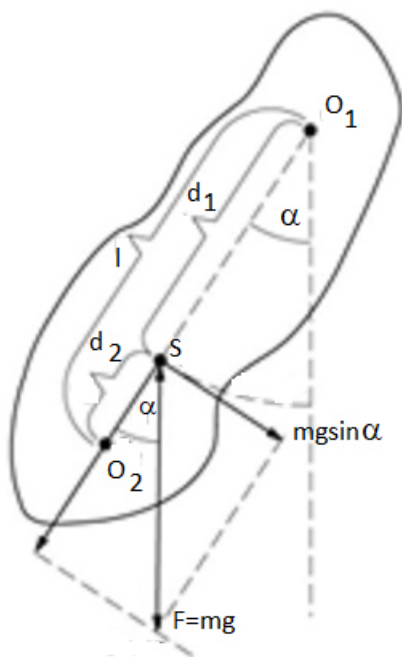


WYZNACZANIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO ZA POMOCĄ WAHADŁA REWERSYJNEGO

WSTĘP

Wahadłem fizycznym nazywamy każdą bryłę sztywną o masie m wykonującą pod działaniem siły ciężkości okresowy ruch drgający dookoła osi nie przechodzącej przez środek masy S tej bryły, co ilustruje Rys. 1.



Rys. 1. Rozkład sił działających na wahadło fizyczne

Wahadło jest w równowadze, gdy jego środek masy S znajduje się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez oś obrotu O_1 . Jeżeli wahadło wychylimy z położenia równowagi o jakiś kąt α , to pojawi się moment składowej stycznej siły ciężkości względem osi O_1 , a wartość jego wynosi

$$M = -m \cdot g \cdot d_1 \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

Zgodnie z II zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej równanie ruchu wahadła fizycznego możemy zapisać w następującej postaci:

$$I_1 \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + m \cdot g \cdot d_1 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

Gdzie: I_1 jest momentem bezwładności wahadła względem osi O_1 .

Jeżeli wychylenie α jest małe, $\sin \alpha$ różni się od kąta α (wyrażonego w radianach) o wartość rzędu α^3 , którą można pominąć. Wziąwszy pod uwagę to istotne przybliżenie, możemy zapisać równanie (2) w następującej formie:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega^2 \cdot \alpha = 0 \quad (3)$$

gdzie: $\omega^2 = \frac{m \cdot g \cdot d_1}{I_1}$

Rozwiązaniem równania różniczkowego (3) jest funkcja:

$$\alpha(t) = \alpha_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (4)$$

Wzór (4) wskazuje, że wahadło fizyczne porusza się ruchem drgającym prostym (harmonicznym). Amplituda kątowa α_m i faza początkowa φ zależą od warunków początkowych. Okres drgań T_1 , związany jest bezpośrednio z częstotliwością (pulsacją) ω i jest równy

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{m \cdot g \cdot d_1}} \quad (5)$$

Określenie przyspieszenia ziemskiego g ze wzoru (5) napotyka na istotne trudności z bezpośrednim, wystarczająco dokładnym pomiarem wielkości I_1 oraz d_1 . Niepewności te można starać się zmniejszyć, dobierając odpowiedni kształt bryły. Istnieje jednak inna i ciekawa metoda, pozwalająca na wykorzystanie wahadła fizycznego do pomiarów przyspieszenia ziemskiego, w której te pomiarowo kłopotliwe wielkości nie występują. Metoda ta bazuje na badaniu okresów wahań danej bryły względem różnych osi obrotu (tzw. dwuosiowe wahadło fizyczne). Skupiając uwagę na bryle wahającej się względem osi O_1 (Rys. 1.) zapytajmy: czy istnieje taka oś O_2 przechodząca przez prostą O_1S i równoległa do osi O_1 , względem której bryła wahałaby się z takimi samymi wartościami okresów?. Jeśli tak, to przez który punkt prostej O_1S oś ta przechodzi? Zgodnie z oznaczeniami na Rys. 1. i wzorem (5) mamy:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{m \cdot g \cdot d_1}} \quad (6)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{m \cdot g \cdot d_2}}$$

Korzystając z prawa Steinera momenty bezwładności I_1 i I_2 względem osi przechodzących przez O_1 i O_2 możemy wyrazić jednym momentem bezwładności I_S względem osi przechodzącej przez środek masy S , a mianowicie:

$$I_1 = I_S + m \cdot d_1^2 \quad I_2 = I_S + m \cdot d_2^2 \quad (7)$$

Ze wzorów (6) i (7) wynika, że równość $T_1 = T_2$ będzie spełniona, jeżeli:

$$\frac{I_S + m \cdot d_1^2}{d_1} = \frac{I_S + m \cdot d_2^2}{d_2} \quad (8)$$

Natomiast ze wzoru (8) wynika odpowiedź na wcześniej postawione pytanie o równość okresów $T_1 = T_2$, którą można zrealizować w każdej z dwóch sytuacji:

1. gdy położenie O_2 ustalimy w odległości $d_1 = d_2$,
2. gdy położenie O_2 ustalimy w takiej odległości, dla której:

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{I_S}{m} \quad (9)$$

W przypadku 1. o okresach wyrażonych przez równania (6) nie możemy powiedzieć nic poza tym, że są takie same. Natomiast dla przypadku 2. Z połączenia wzorów (6),(7) i (9) otrzymujemy

$$T_1 = T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_S + m \cdot d_1^2}{m \cdot g \cdot d_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{d_1 + d_2}{g}} \quad (10)$$

Oznaczając symbolem l odległość między osiami O_1 i O_2 :

$$l = d_1 + d_2 \quad (11)$$

$$T_1 = T_2 = T$$

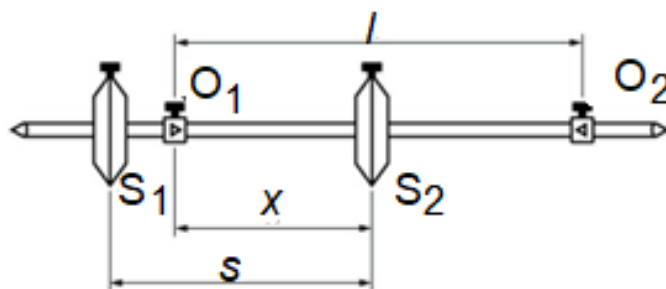
otrzymamy ostatecznie:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (12)$$

Na podstawie wzoru (12) zarysowała się zatem prosta idea pośredniego pomiaru przyspieszenia ziemskiego, bez konieczności wyznaczania momentu bezwładności I_S , masy m i położenia środka masy S wahadła fizycznego, lecz wykorzystująca tylko łatwy do realizacji pomiar okresu T oraz pomiar odległości l między osiami. Jednak pojawia się problem praktycznego wyznaczenia położenia osi, dla których jest słuszny będzie warunek (9), dysponując bryłą o danym kształcie, a więc z góry ustalonym położeniu środka masy S oraz I_S i m ?

Rozwiązanie powyższego problemu znaleziono w układzie tzw. wahadła rewersyjnego, w którym postąpiono dokładnie odwrotnie, to znaczy dwie osie są stałe, zmienia się natomiast położenie środka masy, a wraz z nim wartość I_S aż do spełnienia warunku $T_1 = T_2$.

Na Rys. 2 przedstawiono schemat używanego najczęściej wahadła rewersyjnego.



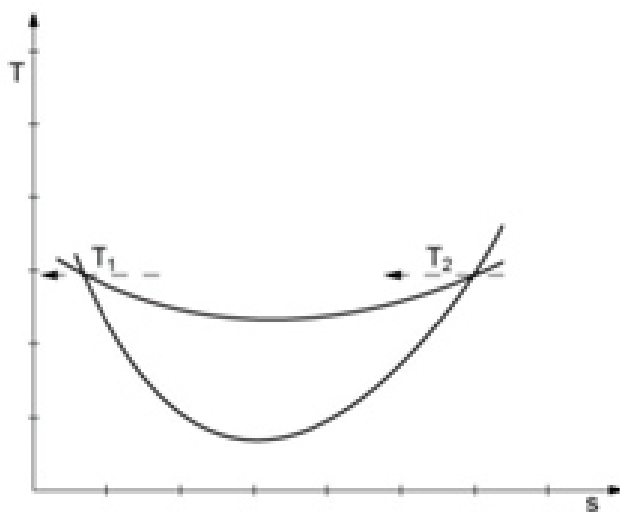
Rys. 2. Asymetryczne wahadło rewersyjne.

Wahadło przedstawione na Rys. 2. składa się z metalowego pręta, na którym osadzone są dwie metalowe przesuwalne wzdłuż osi pręta masy S_1 i S_2 o kształcie soczewek (kształt ten ma na celu zmniejszenie oporu powietrza w czasie ruchu) oraz dwa przesuwalne ostrza O_1 i O_2 , zwrócone ku sobie. Przedstawione wahadło jest typu asymetrycznego, ponieważ masa S_1 jest zamocowana na stałe poza punktem zawieszenia O_1 . Układ taki zapewnia wyeliminowanie nieprzydatnej sytuacji 1., opisaną wcześniej. Jeżeli bowiem wahadło bez masy S_2 wykazuje dużą asymetrię, tzn. jego środek masy ma położenie bardzo blisko osi O_1 , to nawet przesunięcie masy S_2 do samej osi O_2 nie zdoła przesunąć środka masy całego układu, aby zrealizować warunek $d_1 = d_2$. Należy jeszcze bliżej rozpatrzyć, czy dla naszego wahadła na pewno będzie istniało położenie x masy S_2 , przy którym zajdzie warunek (9), który możemy przepisać w postaci

$$x(l - x) = \frac{I_S}{m} \quad (13)$$

Przesuwanie masy S_2 skutkuje zmianami wartości x w równaniu (13), ale również wpływa na wielkość I_S . Ponieważ równanie (13) jest kwadratowe, można się spodziewać dwóch rozwiązań x , odpowiadającym dwóm różnym wartościom położenia x masy S_2 , dla których warunek (13) jest spełniony. To umożliwia obliczenie przyspieszenia z użyciem wzoru (12). Jednak, czy takie dwa rozwiązania będą istniały ($\Delta > 0$) zależy od wartości I_S .

Reasumując: w odniesieniu do konkretnego wahadła, którym zamierzamy się posługiwać, jest niezwykle istotne wstępne dobranie odległości pomiędzy ostrzami O_1 i O_2 oraz położenie masy S_1 . Od doboru tych parametrów będzie zależało, czy przy zmianie położenia masy S_2 zaobserwujemy poszukiwaną równość okresów, a jeśli tak, to dla ilu jej położzeń (jednego, dwóch lub trzech?). Na Rys. 3. przedstawiono schematycznie zależność okresów drgań wahadła rewersyjnego od położenia x przesuwanej masy S_2 dla poprawnie wybranych parametrów wahadła.



Rys. 3. Zależność okresów drgań wahadła rewersyjnego od położenia S przesuwanej masy.

W laboratorium używa się wahadła rewersyjnego, w którym położenie masy S_1 oraz odległość pomiędzy ostrzami zostały optymalnie dobrane i nie należy ich zmieniać. Zapewnia to wyeliminowanie opisaną wyżej nieprzydatnej sytuacji 1., a sytuacja 2. umożliwia pomiar przyspieszenia ze wzoru (12) przy dwóch położeniach masy S_2 . Przy pewnych ustawieniach drugi punkt przecięcia na wykresie Rys. 3. można uzyskać drogą ekstrapolacji. Zakres zmian położenia masy S_2 wynosi około 45 cm. Wahadło należy zawieszać tak, by pręt nie ocierał o wspornik. Okres drgań wahadła mierzony jest automatycznie przy pomocy seryjnego układu pomiarowego, którego podstawowym elementem jest czujnik fotoelektryczny.

WYKONANIE POMIARÓW

1. Zamocować wahadło ostrzem O_1 na wsporniku, nad którym przymocowana jest nieruchoma masa S_1 .
2. Wspornik czujnika fotoelektrycznego przesunąć tak, aby końcówka pręta wahadła przecinała strumień światła docierający do czujnika.
3. Przesunąć masę S_2 jak najbliżej masy S_1 . Odczytać położenie x masy S_2 względem dowolnie wybranego punktu odniesienia. Punktem odniesienia może być górna ściana obudowy układu na której można oprzeć krawędź liniału. Po wyborze punktu odniesienia wszystkie pomiary x wykonywać takim samym sposobem.
Uwaga: W ćwiczeniu nie ma potrzeby dokonywania pomiarów odległości s (patrz Rys. 2.) pomiędzy masami lub odległości x pomiędzy ruchomą masą a punktem zawieszenia wahadła. Zero współrzędnej położenia x można (patrz Rys. 3) wybrać dowolnie, gdyż wartość x nie występuje we wzorze (12).
4. Wychylić wahadło o ok. 5° od położenia równowagi i puścić. Odczekać kilka wahań do momentu, gdy wahadło przestanie wykonywać pasożytnicze drgania boczne, a następnie włączyć zegar układu i zmierzyć czas t_n trwania n kolejnych wahań. Liczbę wahań n podaje Prowadzący.
5. Przesuwać masę S_2 co np. 1 – 1.5 cm w całym zakresie odległości między ostrzami i każdorazowo odczytywać położenie x oraz zmierzyć czas t_n .
6. Zdjąć wahadło ze wspornika a następnie zawiesić je na drugim nożu. Gdy zajdzie potrzeba, należy zmienić pozycję wspornika z czujnikiem.
7. Powtórzyć pomiary jak w pkt. 4.
8. Zdjąć wahadło i zmierzyć przy użyciu katetometru położenia ostrzy: $O_1 - l_1$ i $O_2 - l_2$ (bezwzględna wartość różnicy $|l_1 - l_2|$ to długość zredukowana wahadła fizycznego).
9. Zmierzone wartości zapisać w Tabeli Pomiarów.
10. Oszacować niepewności wzorcowania i eksperymentatora dla pomiarów bezpośrednich i zapisać je w Tabeli Niepewności.
11. W celu oszacowania całkowitej niepewności pomiaru t_n należy dla dowolnego położenia x powtórzyć 5-krotnie pomiar czasu n wahań. Jako niepewność $u(t_n)$ przyjąć maksymalną różnicę między wartościami t_n wykonanej serii.

TABELA POMIARÓW

Zawieszenie wahadła	n	x	t_n	Zawieszenie wahadła	n	x	t_n
ostrze 1	[-]	[cm]	[s]	ostrze 2	[-]	[cm]	[s]
1				1			
2				2			
...				...			

POŁOŻENIA OSTRZY WAHADŁA

l_1	l_2
[cm]	[cm]

TABELA NIEPEWNOŚCI

$u(t_n)$	$\Delta_d(x)$	$\Delta_e(x)$	$\Delta_d(l_1) = \Delta_d(l_2)$	$\Delta_e(l_1) = \Delta_e(l_2)$
[s]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]

OPRACOWANIE WYNIKÓW

- Wykonać przykłady oszacowania wartości rozszerzonych ($k = 2$) standardowych niepewności wielkości mierzonych bezpośrednio:

$$U(x) = k \cdot u(x) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(x))^2 + (\Delta_e(x))^2}{3}} \quad (14)$$

$$U(l_1) = k \cdot u(l_1) = U(l_2) = k \cdot u(l_2) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d(l_1))^2 + (\Delta_e(l_1))^2}{3}} \quad (15)$$

$$U(t_n) = k \cdot u(t_n) \quad (16)$$

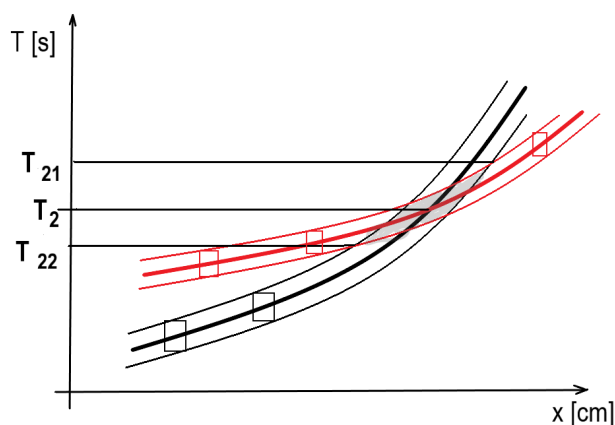
- Dla dowolnego x wykonać przykład obliczenia okresu wahań T_n :

$$T_n = \frac{t_n}{n} \quad (17)$$

- Oszacować niepewności okresu $u(T_n)$:

$$u(T_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial T_n}{\partial t_n} \cdot U(t_n)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \cdot U(t_n)\right)^2} = \frac{U(t_n)}{n} \quad (18)$$

- Wykonać wykres rodziny zależności okresów T_n wahań wahadła od położenia x soczewki ruchomej dla zawieszenia na ostrzu O_1 i na ostrzu O_2 . Gdy znajdzie konieczność, ekstrapolować krzywe do ich przecięcia się w lewej i prawej części wykresu
- Odczytać z wykresu rzędne punktów przecięcia krzywych T_1 i T_2 .
- W celu oszacowania niepewności $u(T_1)$ i $u(T_2)$ wykonać następującą procedurę. W oparciu o dane prostokątów niepewności $u(T_n)$ poprowadzić na wykresie linie pomocnicze, jak na Rys. 4, dla każdego obszaru zawierającego punkt przecięcia krzywych.
- Dla każdej z wartości T_1 i T_2 odczytać z wykresu odpowiednie wartości: T_{12} , T_{11} , T_{21} , T_{22} (Rys. 4). (Szczegółowy przykład wykonania konstrukcji wyznaczenia poszukiwanych wartości zamieszczono w Dodatku).



Rys. 4. Konstrukcja na wykresie dla wyznaczenia niepewności okresów: T_1 i T_2 .

- Wyznaczone z wykresu wartości umieścić w Tabeli Wyników:

TABELA WYNIKÓW					
T_1	T_{11}	T_{12}	T_2	T_{21}	T_{22}
[s]	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]

- Obliczyć średnią wartość okresu T wahadła zredukowanego:

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (19)$$

10. Oszacować wartości niepewności $u(T_1)$ i $u(T_2)$:

$$u(T_1) = \frac{T_{11} - T_{12}}{2} \quad (20)$$

$$u(T_2) = \frac{T_{21} - T_{22}}{2} \quad (21)$$

11. Oszacować wartości niepewność $u(T)$:

$$u(T) = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial T_1} \cdot u(T_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial T_2} \cdot u(T_2)\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot u(T_1)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot u(T_2)\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(u(T_1))^2 + (u(T_2))^2}}{2} \quad (22)$$

12. Wyznaczyć zredukowaną długość wahadła l :

$$l = |l_2 - l_1| \quad (23)$$

13. Oszacować wartość niepewności $u(l)$:

$$u(l) = \sqrt{\left(\frac{\partial l}{\partial l_2} \cdot U(l_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial l_1} \cdot U(l_1)\right)^2} = \sqrt{(1 \cdot U(l_2))^2 + (-1 \cdot U(l_1))^2} = \sqrt{(U(l_2))^2 + (U(l_1))^2} = \sqrt{2} \cdot U(l_1) \quad (24)$$

14. Wyznaczyć wartość przyspieszenia ziemskiego g :

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{T^2} \quad (25)$$

15. Oszacować niepewność $u(g)$:

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} \cdot u(l)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \cdot u(T)\right)^2} = g \cdot \sqrt{\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{u(T)}{T}\right)^2} \quad (26)$$

16. Zamieścić w Tabeli Wyników Końcowych wartości wyznaczonej parametrów badanego wahadła zredukowanego:

TABELA WYNIKÓW KOŃCOWYCH

Długość wahadła zredukowanego		Okres drgań wahadła zredukowanego		Wyznaczona wartość przyspieszenia ziemskiego	
l	$u(l)$	T	$u(T)$	g	$u(g)$
$[m]$	$[m]$	$[s]$	$[s]$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$

17. Opracować i zapisać wnioski z ćwiczenia.

LITERATURA

- [1] HALLIDAY D., RESNICK R., WALKER J.: Podstawy fizyki cz. 2, PWN, Warszawa 2003.
- [2] SZYDŁOWSKI H.: Pracownia fizyczna, PWN, Warszawa 1994.
- [3] Ćwiczenia Laboratoryjne z Fizyki (praca zbiorowa), Skrypt Nr 279, Politechnika Opolska 2007.

DODATEK

Dane liczbowe użyte do przygotowania poniższych wykresów mają charakter poglądowy i nie mają bezpośredniego związku z rzeczywistym wahadłem rewersyjnym będącym na wyposażeniu stanowiska laboratoryjnego.

