ST.2. PRZYKŁADY OBLICZEŃ - UWAGI

Celem zamieszczenia w sprawozdaniu przykładów obliczeń jest dostarczenie Prowadzącemu zajęcia możliwości weryfikacji stopnia opanowania przez Studenta umiejętności stosowania reguł przybliżeń w działaniach arytmetycznych z użyciem liczb przybliżonych.

Przykład obliczenia wykonuje się tylko raz dla każdego wzoru, użytego po raz pierwszy w sprawozdaniu.

Obowiązuje zasada: jeden wzór – jedno przykładowe obliczenie.

Konieczność wykonania przykładu obliczeń dotyczy również szacowania wartości niepewności.

Wykonując przykład pierwszego użycia wzoru do obliczeń, należy:

1. w sprawozdaniu **zamieścić adnotację**, które wartości eksperymentalne użyto jako dane dla przykładu,
2. **ukazać kolejne etapy** dochodzenia do wyniku końcowego, poprzez zapisy wyników pojedynczych działań arytmetycznych. W przykładach szacowania wartości niepewności nie ma takiej konieczności.
3. **stosować reguły zaokrągleń** wyników działań arytmetycznych z użyciem liczb przybliżonych.
4. w przykładach **szacowania wartości niepewności**, należy wynik końcowy najpierw podać z trzema cyframi znaczącymi, a następnie dokonać zaokrąglenia (w górę!) do dwóch cyfr znaczących.
5. wykonać **wyprowadzenie jednostki** wyniku końcowego.

Użycie wartości w jednostkach układu SI (w odniesieniu do wszystkim wielkości występujących we wzorze), pozwala zawsze otrzymać wartość wyniku końcowego w jednostce SI.

UŻYCIE TABLICOWYCH WARTOŚCI STAŁYCH FIZYCZNYCH LUB MATEMATYCZNYCH

1. Należy używać stałych fizycznych, których wartości wyrażone są jednostkami układu SI. Zaleca się korzystanie z tablic zawartych w dziale **Stałe Fizyczne**
2. Liczba cyfr znaczących zawartych w stałej musi być co najmniej o 1 większa, niż zawiera ich obecna we wzorze liczba przybliżona z największą liczbą cyfr znaczących.

Proponowany sposób wykonania przykładu obliczeń dla hipotetycznego wzoru, który po raz pierwszy zostaje użyty w sprawozdaniu:

$$N = \pi \cdot \frac{m \cdot g + \frac{(l_0 + a \cdot t)^2}{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

użyjemy danych, którymi są wartości wielkości fizycznych: zmierzone lub wyznaczone (jako wyniki obliczeń cząstkowych):

$$m = 125\ [kg] \quad l_0 = 56{,}85\ [\sqrt{N}] \quad a = 1{,}4\ \left[\sqrt{\frac{kg}{s^2}}\right]$$

$$t = 0{,}69852\ [\sqrt{m}] \quad V = 198{,}8\ \left[\cdot 10^6 \frac{m}{s}\right]$$

po zapisaniu obecnych we wzorze wartości stałych fizycznych i matematycznych:

$$\pi = 3{,}1415926 \quad g = 9{,}806\ \left[\frac{m}{s^2}\right] \quad c = 2{,}9979\ \left[\cdot 10^8 \frac{m}{s}\right]$$

rozpoczynamy wykonanie przykładu obliczeń:

$$N = \pi \cdot \frac{m \cdot g + \frac{(l_0 + a \cdot t)^2}{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = 3{,}1415926 \cdot \frac{125 \cdot 9{,}806 + \frac{(56{,}85 + 1{,}4 \cdot 0{,}69852)^2}{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{198{,}8 \cdot 10^6}{2{,}9979 \cdot 10^8}\right)^2}} =$$

$$3{,}1415926 \cdot \frac{1{,}23 \cdot 10^3 + \frac{(56{,}85 + 0{,}98)^2}{2}}{\sqrt{1 + (0{,}6631)^2}} = 3{,}1415926 \cdot \frac{1{,}23 \cdot 10^3 + \frac{(57{,}83)^2}{2}}{\sqrt{1 + 0{,}4397}} =$$

$$3{,}1415926 \cdot \frac{1{,}23 \cdot 10^3 + \frac{3{,}344 \cdot 10^3}{2}}{\sqrt{1{,}4397}} = 3{,}1415926 \cdot \frac{1{,}23 \cdot 10^3 + 1{,}672 \cdot 10^3}{1{,}1999} =$$

$$3{,}1415926 \cdot \frac{2{,}90 \cdot 10^3}{1{,}1999} = 3{,}1415926 \cdot 2{,}42 \cdot 10^3 = 7{,}60 \cdot 10^3$$

Wyprowadzenie jednostki wartości końcowej:

$$[N] = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2} + \frac{\left(\sqrt{N} + \sqrt{\frac{kg}{s^2}} \cdot \sqrt{m}\right)^2}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\frac{m}{s}}{\frac{m}{s}}\right)^2}} = \frac{N + \left(\sqrt{N} + \sqrt{\frac{kg \cdot m}{s^2}}\right)^2}{1} =$$

$$N + \frac{\left(\sqrt{N} + \sqrt{N}\right)^2}{2} = N + \frac{\left(\sqrt{N}\right)^2}{2} = N + N = N$$

Zapisujemy wynik przykładu obliczeń:

$$N = 7{,}60 \cdot 10^3\ [N]$$

PRZYKŁAD OSZACOWANIA CAŁKOWITEJ NIEPEWNOŚCI WARTOŚCI ŚREDNIEJ SERII POMIARÓW Z UWZGLĘDNIENIEM METODY TYPU A I METODY TYPU B

W poniższym przykładzie użyjemy serii złożonej z n = 7 pomiarów (bezpośrednich lub pośrednich) wartości x, które w sposób stabelaryzowany zapisano poniżej:

TABELA WYNIKÓW

i	x_i	$u(x_i)$
	[mm]	*[mm]*
1	8,25	0,08
2	8,24	0,07
3	8,25	0,09
4	8,23	0,04
5	8,19	0,08
6	8,22	0,08
7	8,24	0,07

Przykład obliczenia wartości średniej, x:

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$x = \frac{8{,}25 + 8{,}24 + 8{,}25 + 8{,}23 + 8{,}19 + 8{,}22 + 8{,}24}{7} = \frac{57{,}62}{7} = 8{,}231\ [mm]$$

Całkowita niepewność oszacowania wartości średniej u(x) jest złożeniem dwóch składowych:

- **$u(x)_A$ - niepewności typu A**, związanej ze statystycznym rozrzutem poszczególnych wartości xi wokół średniej wartości x, oraz
- **$u(x)_B$ - niepewności typu B**, w obliczeniu której wzór na średnią arytmetyczną n składników traktujemy jako funkcję n zmiennych niezależnych.

$$u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{u(x)_A^2 + u(x)_B^2}$$

Obliczenie wartości $u(x)_A$:

$$u(x)_A \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2}{n \cdot (n-1)}}$$

$$u(x)_A =$$

$$\sqrt{\frac{(8{,}231 - 8{,}25)^2 + (8{,}231 - 8{,}24)^2 + (8{,}231 - 8{,}25)^2 + (8{,}231 - 8{,}23)^2 + (8{,}231 - 8{,}19)^2 + (8{,}231 - 8{,}22)^2 + (8{,}231 - 8{,}24)^2}{7 \cdot (7-1)}} =$$

$$\sqrt{\frac{361 \cdot 10^{-6} + 81 \cdot 10^{-6} + 361 \cdot 10^{-6} + 1 \cdot 10^{-6} + 1681 \cdot 10^{-6} + 121 \cdot 10^{-6} + 81 \cdot 10^{-6}}{42}} =$$

$$\sqrt{\frac{2687}{42} 10^{-6}} =$$

$$\sqrt{63{,}98 \cdot 10^{-6}}$$

Ponieważ szacujemy wartość niepewności, dlatego podczas wykonywania obliczeń nie stosujemy reguł zaokrągleń stosowanych w działaniach arytmetycznych z użyciem liczb przybliżonych. Z praktycznego punktu widzenia, warto ten cząstkowy wynik zostawić z 3- lub 4-ma cyframi znaczącymi.

Obliczenie wartości $u(x)_B$:

$$u(x)_B \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(u(x_i)\right)^2}{n}}$$

$$u(x)_B =$$

$$\sqrt{\frac{(0{,}08)^2 + (0{,}07)^2 + (0{,}09)^2 + (0{,}04)^2 + (0{,}08)^2 + (0{,}08)^2 + (0{,}07)^2}{7}} =$$

$$\sqrt{\frac{64 \cdot 10^{-4} + 49 \cdot 10^{-4} + 81 \cdot 10^{-4} + 16 \cdot 10^{-4} + 64 \cdot 10^{-4} + 64 \cdot 10^{-4} + 49 \cdot 10^{-4}}{7}} =$$

$$\sqrt{\frac{387}{7} \cdot 10^{-4}} =$$

$$\sqrt{55{,}29 \cdot 10^{-4}}$$

Znając wartości składowych niepewności, szacujemy wartość całkowitej niepewności:

$$u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{u(x)_A^2 + u(x)_B^2}$$

$$u(x) =$$
$$\sqrt{63{,}98 \cdot 10^{-6} + 55{,}29 \cdot 10^{-4}} =$$
$$zapisujemy\ wartości\ z\ takimi\ samymi\ mnożnikami =$$
$$\sqrt{63{,}98 \cdot 10^{-6} + 5529 \cdot 10^{-6}} =$$
$$\sqrt{5592{,}98 \cdot 10^{-6}} =$$
$$74{,}8 \cdot 10^{-6} =$$
$$75 \cdot 10^{-3}\ [mm]$$

Końcową wartość wyniku oszacowania niepewności najpierw podajemy z trzema cyframi znaczącymi, a następnie zaokrąglamy wartość „w górę" do dwóch cyfr znaczących.

Z uwagi na fakt, że wartość średniej wyrażamy w [mm] (bez mnożnika), podając wynik końcowy musimy ujednolicić jednostki x oraz u(x):

$$x = 8{,}231\ \pm 0{,}075\ [mm]$$

W sprawozdaniu, zapisując przykład obliczenia całkowitej niepewności wartości średniej, tak szczegółowe rozpisanie powinno być wykonane w przypadkach, gdy seria pomiarowa jest co najwyżej złożona z n = 5 przypadków. Dla dłuższych serii wartości należy ograniczyć się do zapisania najważniejszych wyników cząstkowych - sum częściowych.

W sprawozdaniach nie ma potrzeby rozbijania przykładu obliczeń na dwa pod przykłady, osobno dla metody typu A i metody typu B – można to wykonać w jednym ciągłym zapisie.