

## WYZNACZANIE STOSUNKU $C_p/C_v$ DLA POWIETRZA METODĄ CLEMENTA - DESORMESA

### WSTĘP

Stan ciała lotnego (gazu) posiadającego sprężystość objętości, określamy podając cztery jego parametry: objętość  $V$ , temperaturę  $T$ , masę  $M$  i ciśnienie  $p$ . Jeżeli masa gazu jest stała, zmiana jednego z parametrów powoduje zmianę pozostałych (a przynajmniej jednego z nich). Wnioskujemy stąd, że parametry określające stan gazu są ze sobą w ścisły sposób powiązane. Związek ten podaje tzw. równanie stanu gazu doskonałego.

Gazem doskonałym nazywamy gaz składający się z cząsteczek nie posiadających objętości własnej (punkty materialne). W takim gazie nie działają siły spójności między cząsteczkami. Przy niskich ciśnieniach wymiary cząsteczek gazów rzeczywistych są o wiele mniejsze od średniej odległości pomiędzy cząsteczkami, co pozwala w pierwszym przybliżeniu traktować te cząsteczki jak punkty materialne. Z uwagi na duże odległości międzycząsteczkowe siły spójności są bardzo małe i można je zaniedbać. Tak więc przy niskich ciśnieniach gazy rzeczywiste będą zachowywały się w sposób podobny jak modelowy gaz idealny. Jednakże przy wysokich ciśnieniach gazy rzeczywiste nie będą spełniały warunków nałożonych na gazy idealne.

Równanie stanu gazu doskonałego możemy wyprowadzić w oparciu o kinetyczną teorię gazów. Załóżmy, że gaz zamknięty jest w sześciennym naczyniu o długości krawędzi ścianki  $l$ . Zgodnie z definicją gazu doskonałego cząsteczki gazu nie oddziałują z sobą. Każda z cząsteczek porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, dopóki nie zderzy się ze ścianką naczynia. Podczas zderzenia energia kinetyczna cząsteczki nie ulega zmianie, zmienia się natomiast jej pęd (zderzenie sprężyste)

$$\Delta p_0 = 2m \cdot v$$

gdzie:  $\Delta p_0$  – zmiana pędu,  
 $m$  – masa cząsteczki,  
 $v$  – średnia prędkość ruchu cząsteczki.

Z uwagi na dużą liczbę cząstek gazu w naczyniu, żaden kierunek ruchu cząsteczek nie jest wyróżniony, możemy więc przyjąć, że między każdą parą przeciwległych ścian naczynia porusza się 1/3 całkowitej liczby cząsteczek zamkniętych w naczyniu. Dowolna cząsteczka uderza w dowolną ściankę w równych odstępach czasu  $t$ :

$$t = \frac{2l}{v}$$

W czasie  $t$  1/3 z całkowitej liczby  $N$  cząsteczek gazu dozna (na obu ściankach) całkowitej zmiany pędu równej:

$$\Delta p_2 = \frac{4}{3} N \cdot m \cdot v$$

Zmiana pędu na jednej ściance będzie wynosiła

$$\Delta p_1 = \frac{2}{3} N \cdot m \cdot v$$

Siłę  $F$ , z jaką cząsteczki gazu działają na pojedynczą ściankę, wyznaczyć można korzystając z drugiej zasady dynamiki:

$$\Delta p_1 = F \cdot t$$
$$F \cdot \frac{2l}{v} = \frac{2}{3} N \cdot m \cdot v$$

Dzieląc ostatnią zależność przez objętość naczynia  $V = l^3$ , oraz wykonując proste przekształcenia otrzymamy:

$$p = \frac{F}{l^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{N \cdot m \cdot v^2}{V}$$
$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot E_k$$

gdzie:  $p$  – ciśnienie gazu w naczyniu,  
 $V$  – objętość zajmowana przez gaz,  
 $E_k$  – średnia energia kinetyczna cząsteczki gazu,  $E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$ .

Z definicji temperatury bezwzględnej wiadomo, że jest to wielkość wprost proporcjonalna do średniej energii kinetycznej cząsteczek

$$E_k = A \cdot T$$

gdzie:  $A$  – stała zależna od doboru jednostek,  
 $T$  – temperatura w skali Kelvina.

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{2}{3} \cdot N \cdot A$$

Ponieważ prawa strona tego równania jest (przy ustalonej masie gazu) stałą, więc możemy je przepisać w postaci:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const}$$

Powyższe równanie nosi nazwę równania stanu gazu doskonałego. Z równania tego wynika, że wyrażenie  $pV/T$  ma wartość stałą dla niezmienniej masy gazu.

Obliczmy wartość wyrażenia  $pV/T$  dla jednego mola gazu w warunkach normalnych ( $p_0 = 101325 \text{ N/m}^2$ ,  $T_0 = 273,16 \text{ K}$ ,  $V_0 = 0,0224 \text{ m}^3$ )

$$\frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = R$$

Wartość  $R = 6,31446261815324 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$  to uniwersalna stała gazowa.

Równanie stanu gazu doskonałego dla 1 mola gazu:

$$p \cdot V = R \cdot T$$

Dla  $n$  moli gazu równanie stanu gazu doskonałego będzie miało postać:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

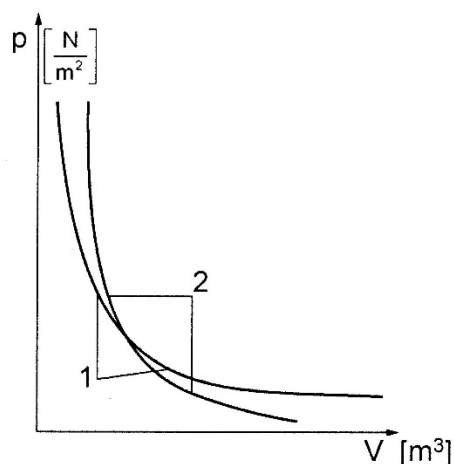
Z równania stanu gazu doskonałego bezpośrednio wynikają odkryte doświadczalnie prawa przemian: izotermicznej, izobarycznej i izochorycznej.

### Przemiana izotermiczna.

Opisuje ją prawo Boyle'a-Mariotte'a (dla  $M = \text{const}$  i  $T = \text{const}$ ).

$$p \cdot V = \text{const}$$

W czasie izotermicznej przemiany stałej masy gazu ciśnienie wywierane przez gaz na ścianki naczynia jest odwrotnie proporcjonalne do objętości zajmowanej przez gaz.



Rys. 1. Wykres izotermy (1) i adiabaty (2)

### Przemiana izobaryczna

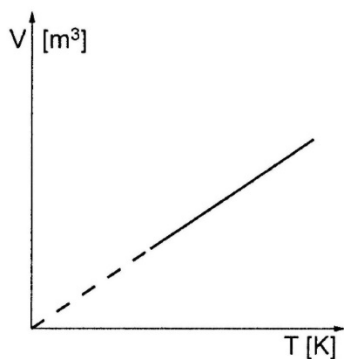
Opisuje ją prawo Gay-Lussaca (dla  $M = \text{const}$  i  $p = \text{const}$ )

$$V = \frac{V_1}{T_1} \cdot T$$

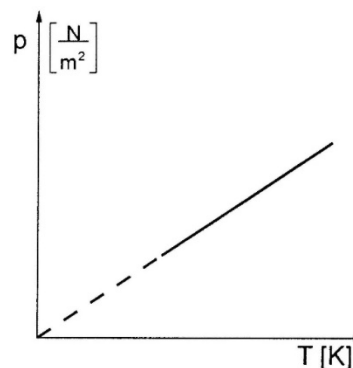
$$V = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

gdzie  $\alpha = \frac{1}{273,16 \text{ K}}$

Podczas przemiany izobarycznej stałej masy gazu, jego objętość jest wprost proporcjonalna do temperatury w skali Kelvina.



Rys. 2. Wykres przemiany izobarycznej.



Rys. 3. Wykres przemiany izochorycznej.

### Przemiana izochoryczna.

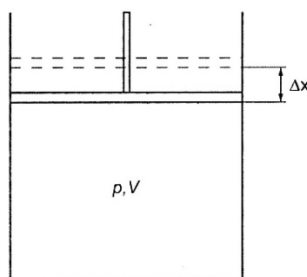
Opisuje ją prawo Charlesa (dla  $M = \text{const}$  i  $V = \text{const}$ ).

$$p = \frac{p_1}{T_1} \cdot T$$

$$p = p_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

gdzie  $\alpha = \frac{1}{273,16 \text{ K}}$

W przemianie izochorycznej stałej masy gazu ciśnienie gazu jest wprost proporcjonalne do jego temperatury bezwzględnej.



**Rys. 4.** Schemat naczynia zamkniętego ruchomym tłokiem.

Obliczmy pracę  $\Delta W$ , jaką wykonuje gaz w czasie rozprężenia (zwiększania objętości). Niech w naczyniu z tłokiem (Rys. 4.) o polu powierzchni  $S$  znajduje się gaz o masie  $M$  pod ciśnieniem  $p$ . Gaz zajmuje całą objętość  $V$  naczynia zamkniętą tłokiem. Jeżeli gaz zwiększy swoją objętość np. wskutek podgrzania, to tłok przesunie się o odcinek  $\Delta x$ . Praca wykonana przez gaz będzie równa iloczynowi siły  $F$ , przeciwko której wykonano pracę (siła nacisku sił zewnętrznych na tłok) i odcinka  $\Delta x$ :

$$\Delta W = F \cdot \Delta x$$

$$F = p \cdot S$$

$$\Delta W = p \cdot S \cdot \Delta x$$

$$\Delta W = p \cdot \Delta V$$

Jest to praca, jaką wykonuje gaz przeciwko siłom zewnętrznym.

Jedną z wielkości fizycznych stosowanych przy opisie własności termodynamicznych ciał stałych, cieczy i gazów jest ciepło właściwe, czyli ciepło potrzebne do ogrzania jednostki masy danej substancji o jeden stopień skali temperatury. W przypadku gazów najwygodniej jest posługiwać się tzw. ciepłem właściwym molowym. Jest to ilość ciepła potrzebna do ogrzania 1 mola danej substancji o 1 Kelwin. Ciepło właściwe danego gazu zależy od warunków w jakich odbywa się zmiana temperatury gazu. W czasie izobarycznego ogrzewania gazu otrzymujemy tzw. ciepło molowe przy stałym ciśnieniu  $C_p$ , którego wartość różni się od ciepła molowego  $C_V$  wyznaczonego podczas izochorycznego ogrzewania gazu. Różnica wartości  $C_p$ , i  $C_V$  wynika z I zasady termodynamiki:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

gdzie:  $\Delta Q$  – ciepło pobrane przez gaz,  
 $\Delta U$  – zmiana energii wewnętrznej gazu,  
 $\Delta W$  – praca gazu.

W czasie ogrzewania izochorycznego gaz nie wykonuje pracy ( $\Delta W = 0$ , ponieważ  $V = \text{const}$  i  $\Delta V = 0$ ). W czasie ogrzewania izobarycznego gaz wykonuje pracę przeciwko siłom zewnętrznym. Aby w tych warunkach ogrzać tę samą masę gazu o 1 K, musimy mu dostarczyć większej ilości ciepła (część ciepła zamieni się na pracę) niż w czasie ogrzewania izochorycznego i dlatego  $C_p > C_V$ . Różnica wartości  $C_p$  i  $C_V$  jest dla wszystkich gazów jednakowa i wynosi:

$$C_p - C_V = R$$

Z praktycznego punktu widzenia bardzo ważną przemianą gazów jest przemiana adiabatyczna. Zachodzi ona wówczas, kiedy poddany przemianie gaz nie wymienia ciepła z otoczeniem ( $\Delta Q = 0$ ). W tym przypadku:

$$\Delta U = -\Delta W$$

$$C_V \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V = 0$$

$$p = \frac{R \cdot T}{V}$$

$$C_V \cdot \Delta T + \frac{R \cdot T}{V} \cdot \Delta V = 0$$

Z kolei dzieląc stronami ostatnie równanie przez  $T$  otrzymamy:

$$C_V \cdot \frac{\Delta T}{T} + R \cdot \frac{\Delta V}{V} = 0$$

przechodząc od przyrostów  $\Delta V$  i  $\Delta T$  do różniczek  $dT$  i  $dV$  oraz całkując ostatnie równanie otrzymamy:

$$C_V \cdot \ln T + R \cdot \ln V = \text{const}$$

Ponieważ jednak  $C_p - C_V = R$ , więc

$$T^{C_V} \cdot V^{C_p - C_V} = \text{const}$$

$$T \cdot V^{\frac{C_p - C_V}{C_V}} = \text{const}$$

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V}$$

$$T \cdot V^{\kappa - 1} = \text{const}$$

Z równania gazu doskonałego wynika, że:

$$T = \frac{p \cdot V}{R}$$

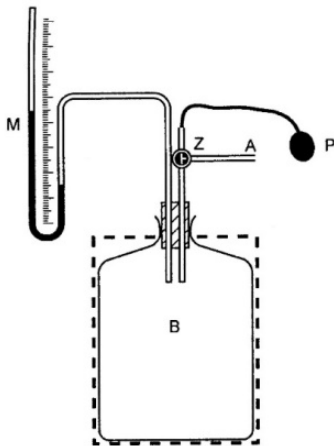
i ostatecznie otrzymamy równanie przemiany adiabatycznej w postaci podanej przez Poissona (tzw. prawo Poissona):

$$p \cdot V^\kappa = \text{const}$$

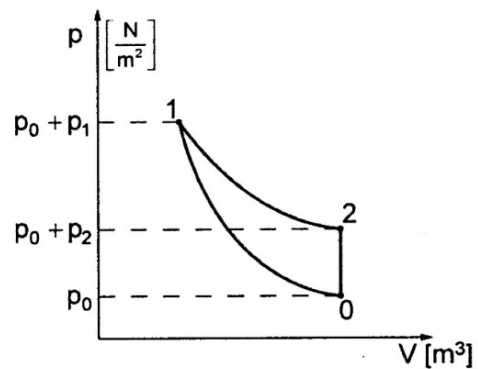
#### UKŁAD DOŚWIADCZALNY

Do pomiaru stosunku  $C_p/C_V$  (molowego ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do molowego ciepła właściwego przy stałej objętości) używamy urządzenia składającego się z:

- szklanego balonu (**B**) wypełnionego powietrzem,
- różnicowego manometru cieczowego (**M**) do pomiaru różnic ciśnienia atmosferycznego i ciśnienia gazu zamkniętego w balonie,
- rurki z zaworem (**Z**) pozwalającym na połączenie balonu bądź z powietrzem atmosferycznym (**A**) bądź z pompką (**P**).



Rys. 5. Schemat układu do pośredniego pomiaru stosunku  $\kappa = C_p/C_V$ .



Rys. 6. Cykl przemian gazu w balonie układu pomiarowego.

Założmy, że ciśnienie gazu w balonie jest o  $p_1$  wyższe od ciśnienia atmosferycznego  $p_0$  (Rys. 6. – punkt I). Otwórzmy zawór i połączmy balon z atmosferą. Gaz zawarty w balonie rozpręża się adiabatycznie i ciśnienie gazu w balonie obniża się do wartości równej ciśnieniu atmosferycznemu. Jednocześnie obniża się temperatura gazu w balonie. Na Rys. 6. odpowiada to przejściu z punktu 1 do punktu 0 po adiabadacie:

$$p \cdot V^\kappa = \text{const}$$

Po zamknięciu zaworu, gaz w balonie będzie się ogrzewał do temperatury otoczenia w sposób izochoryczny (stała objętość balonu). Ciśnienie gazu w balonie wzrośnie o  $p_2$  (punkt 2 na Rys. 6.). Zmianę objętości gazu wskutek zmiany poziomu cieczy w manometrze możemy zaniedbać, jako bardzo małą w porównaniu z całkowitą objętością balonu. Ponieważ temperatura otoczenia jest stała, punkty 1 i 2 na Rys. 6. powinny leżeć na tej samej izotermie  $p \cdot V = \text{const}$ . Przejściu izotermicznemu z punktu 1 do punktu 2 towarzyszy zmiana ciśnienia:

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

Aby wyznaczyć wartość stosunku  $C_p/C_v$ , musimy znaleźć związek pomiędzy zmianą ciśnienia w czasie rozprężenia adiabatycznego  $p_1$  w czasie sprężania izotermicznego  $\Delta p$  i szukaną wartością  $\kappa$ .

$$\frac{dp}{p} + \kappa \cdot \frac{dV}{V} = 0 \qquad \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = 0$$

Przechodząc od różniczek do przyrostów skończonych otrzymamy:

$$\frac{p_1}{p} + \kappa \cdot \frac{\Delta V}{V} = 0 \qquad \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = 0$$

Poprzez proste przekształcenia z ostatniego układu równań otrzymamy:

$$\frac{p_1}{\Delta V} = -\kappa \cdot \frac{p}{V} \qquad \frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{p}{V}$$

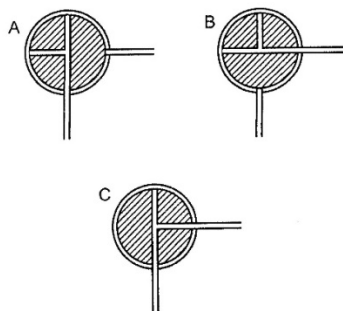
$$\kappa = \frac{p_1}{\Delta p} = \frac{p_1}{p_1 - p_2} \qquad (1)$$

Ponieważ ciśnienia  $p_1$  i  $p_2$  mierzymy manometrem poprzez pomiar różnicy poziomów cieczy w manometrze, korzystając ze wzoru na ciśnienie hydrostatyczne  $p = \rho \cdot g \cdot h$  otrzymamy:

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \qquad (2)$$

gdzie:  $h_1$  – różnica poziomów cieczy w manometrze (nadwyżka ciśnienia w balonie ponad ciśnienie atmosferyczne) wytworzona za pomocą pompki (gruszki gumowej),  
 $h_2$  – różnica poziomów cieczy w manometrze powstała po adiabatycznym rozprężeniu gazu.

## WYKONANIE POMIARÓW



Rys. 7. Kolejne ustawienia kurka zaworu.

1. Kurek zaworu Z ustawić w położeniu A (Rys. 7.) łącząc pompę z balonem i za pomocą pompki wytworzyć nadwyżkę ciśnienia w balonie  $h_1$ . Po wytworzeniu nadwyżki ciśnienia  $h_1$  kurek zaworu Z ustawić w położeniu B. Nadwyżka ciśnienia powinna odpowiadać różnicy poziomów słupa cieczy w manometrze 10-15 cm. Ponieważ w czasie sprężania temperatura gazu może ulec zmianie, należy odczekać (około 3 minut) aż do ustalenia się temperatury gazu, a tym samym do ustalenia się wartości różnicy poziomów. Odczytać wartość  $h_{1L}$  (położenie poziomego słupa cieczy w lewym ramieniu manometru) oraz  $h_{1P}$  (położenie poziomego słupa cieczy w prawym ramieniu manometru).
2. Za pomocą kurka Z (położenie C, Rys. 7.) połączyć balon z powietrzem atmosferycznym. Natychmiast po wyrównaniu poziomów cieczy w manometrze kurek Z ustawić w położeniu B zamykając balon. Odczekać (około 3–4 min.) do ustalenia się różnicy  $h_2$  poziomów cieczy w manometrze i odczytać wartość  $h_{2L}$  (położenie poziomego słupa cieczy w lewym ramieniu manometru) oraz  $h_{2P}$  (położenie poziomego słupa cieczy w prawym ramieniu manometru).
3. Pomiary opisane w pkt. 1 i 2 powtórzyć co najmniej  $n = 10$ -krotnie. Wyniki pomiarów zanotować w Tabeli Pomiarów.

TABELA POMIARÓW

$i$	$h_{1L}$	$h_{1P}$	$h_{2L}$	$h_{2P}$
	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]
1				
$n$				

*Dla wszystkich pomiarów z uwagi na użycie tej samej skali i metody do odczytów położeń poziomów cieczy w obu częściach rurki manometru cieczowego, przyjmujemy odpowiednio identyczne wartości niepewności wzorcowania i oszacowania niepewności eksperymentatora:*

$$\Delta_d h_{iL,P} = \Delta_d h_{1L} = \Delta_d h_{1P} = \Delta_d h_{2L} = \Delta_d h_{2P} = \dots \dots [\text{cm}]$$

$$\Delta_e h_{iL,P} = \Delta_e h_{1L} = \Delta_e h_{1P} = \Delta_e h_{2L} = \Delta_e h_{2P} = \dots \dots [\text{cm}]$$

## OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

1. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności rozszerzonej ( $k = 2$ ) pomiaru położenia poziomu cieczy w dowolnej części rurki manometru:

$$U(h_{iL,P}) = k \cdot u(h_{1L}) = k \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_d h_{1L})^2 + (\Delta_e h_{1L})^2}{3}} \quad (3)$$

2. Wykonać przykład obliczenia różnicy poziomów  $h_1$  (lub  $h_2$ ) cieczy w rurek manometru :

$$h_1 = h_{1L} - h_{1P} \quad (4)$$

3. Wykonać przykład oszacowania niepewności  $u(h_1)$  (lub  $u(h_2)$ ):

$$u(h_1) = \sqrt{\left(\frac{\partial h_1}{\partial h_{1L}} u(h_{1L})\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial h_{1P}} u(h_{1P})\right)^2} = \sqrt{(u(h_{1L}))^2 + (u(h_{1P}))^2} \quad (5)$$

4. Wykonać przykład obliczenia wartości  $\kappa_i$ :

$$\kappa_i = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad (6)$$

5. Wykonać przykład oszacowania wartości niepewności  $u(\kappa_i)$ :

$$u(\kappa_i) = \sqrt{\left(\frac{\partial \kappa_i}{\partial h_1} \cdot u(h_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial \kappa_i}{\partial h_2} \cdot u(h_2)\right)^2} = \frac{\kappa_i}{h_1 - h_2} \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1} \cdot u(h_1)\right)^2 + (u(h_2))^2} \quad (7)$$

6. Wykonać pozostałe obliczenia, uzupełniając wynikami Tabelę Wyników:

TABELA WYNIKÓW

$i$	$h_1$	$u(h_1)$	$h_2$	$u(h_2)$	$\kappa_i$	$u(\kappa_i)$
	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[-]	[-]
1						
2						
...						
n						

7. Wykonać przykład obliczenia średniej wartości  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{\sum \kappa_i}{n} \quad (8)$$

8. Wykonać przykład oszacowania wartości całkowitej niepewności  $u(\kappa)$  z uwzględnieniem metody typu A i metody typu B:

$$u(\kappa) = \sqrt{(u_A(\kappa))^2 + (u_B(\kappa))^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\kappa - \kappa_i)^2}{n(n-1)} + \frac{\sum_{i=1}^n (u(\kappa_i))^2}{n}} \quad (9)$$

9. Zestawić otrzymaną wartość  $\kappa$  z wartością tablicową dla powietrza suchego i teoretyczną dla gazów złożonych z cząsteczek dwuatomowych.

Wartość wykładnika adiabaty	$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$	$u(\kappa) = u\left(\frac{c_p}{c_v}\right)$
	[-]	[-]
doświadczalna		
tablicowa		
teoretyczna		

10. Wykonać wnioski.



## LITERATURA

- [1] SZCZENIOWSKI S.: Fizyka doświadczalna, cz. II PWN, Warszawa 1964.
- [2] MASSALSKI J., MASSALSKA M.: Fizyka dla inżynierów, cz. I, WNT, Warszawa 1973.
- [3] DRYŃSKI T.: Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, PWN, Warszawa 1978.
- [4] SZYDŁOWSKI H.: Pracownia fizyczna, PWN, Warszawa 1973.
- [5] Ćwiczenia Laboratoryjne z Fizyki (praca zbiorowa), Skrypt Nr 279, Politechnika Opolska 2007.