Praktyczne aspekty pomiaru fizycznego.

B. SZACOWANIE NIEPEWNOŚCI POMIARU

POMIARY DŁUGOŚCI

a) z użyciem liniałów (linijek, katetometrów)

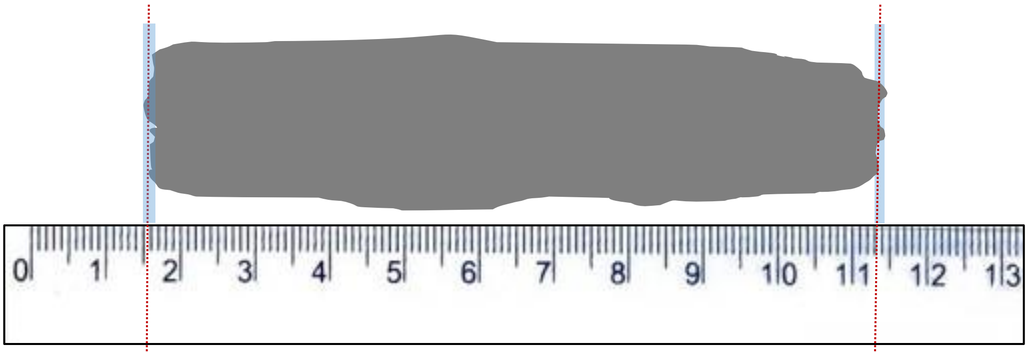
Istotą pomiaru jest ustalenie odległości między arbitralnie wybranymi przez eksperymentatora dwoma punktami reprezentującymi granice interesującego nas wymiaru przedmiotu. Biorąc pod uwagę możliwe niepewności związane z pomiarem tej odległości należy zauważyć, że ten rodzaj pomiaru nie jest wykonywany w sposób bezpośredni.

Przykładając brzeg skali pomiarowej liniału do punktów lub krawędzi umownie oznaczanych jako 1 i 2 oraz reprezentatywnych dla wymiaru mierzonego przedmiotu, odczytujemy ze skali liniału ich położenia x_1 i x_2. Przyjmuje się, że niepewność wzorcowania przyrządu w pomiarze każdego z położeń $\Delta_d(x_i)$ (i = 1, 2) równa jest najmniejszej działce skali użytego liniału. Niepewność wnoszoną przez eksperymentatora $\Delta_e(x_i)$ (i = 1, 2) szacujemy w sposób subiektywny, dopuszczając niepewność odczytu położenia wybranego punktu na skali liniału. Niejednokrotnie, w przypadku nierówności powierzchni lub krawędzi mierzonego przedmiotu, dodatkowo szacujemy wartość niepewności określenia położenia miejsca dla którego wykonujemy odczyt na skali $\Delta_{e1}(x_i)$ (i = 1, 2). Czasami to „rozmycie” położenia określanego miejsca może wynosić kilka działek liniału.

Osobnym problemem eksperymentatora są pomiary rozmiarów przedmiotów podatnych na naciąganie. W takich przypadkach należy wykonać serię pomiarów w różnym stopniu naciągając (w granicach rozsądku!) przedmiot.

Przykład A

Wyznaczanie długości przedmiotu o krawędziach nieregularnych– pomiar jednokrotny



x_1 = 16 mm

$\Delta_d(x_1)$ = 1 mm
(przyjęto wartość najmniejszej działki)

$\Delta_e(x_1)$ = 1 mm
(zakładamy, że odczytujemy położenie krawędzi z dokładnością najmniejszej działki)

$\Delta_{e1}(x_1)$ = 2 mm
(nieregularność krawędzi - dodatkowa niepewność)

Długość przedmiotu:
$x = x_2 - x_1 = 113 - 16 = 97$ mm

x_2 = 113 mm

$\Delta_d(x_2)$ = 1 mm

$\Delta_e(x_2)$ = 1 mm

$\Delta_{e1}(x_2)$ = 1 mm

Oszacowanie niepewności wyznaczenia położenia x_1:

$$u(x_1) = \sqrt{\frac{(\Delta_d x_1)^2 + \left(\Delta_e(x_1) + \Delta_{e1}(x_1)\right)^2}{3}}$$

$$u(x_1) = \sqrt{\frac{1^2 + (1+2)^2}{3}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1.83 \approx 1.9\ mm$$

Oszacowanie niepewności wyznaczenia położenia x_2:

$$u(x_2) = \sqrt{\frac{(\Delta_d x_2)^2 + \left(\Delta_e(x_2) + \Delta_{e1}(x_2)\right)^2}{3}}$$

$$u(x_2) = \sqrt{\frac{1^2 + (1+1)^2}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1.29 \approx 1.3\ mm$$

Oszacowanie niepewności wyznaczenia długości x:

$$u(x) = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_1} u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial x_2} u(x_2)\right)^2}$$

$$u(x) = \sqrt{(-1 \cdot 1.9)^2 + (1 \cdot 1.3)^2} = \sqrt{3.61 + 1{,}69} = 2.30 \approx 2.3\ mm$$

Uwaga:
- wartość całkowitej niepewności najpierw podajemy z trzema cyframi znaczącymi a następnie zaokrąglamy „w górę” do dwóch cyfr znaczących,
- gdy przedmiot posiada ostre krawędzie pomijamy składowe $\Delta_{e1}(x_i)$.

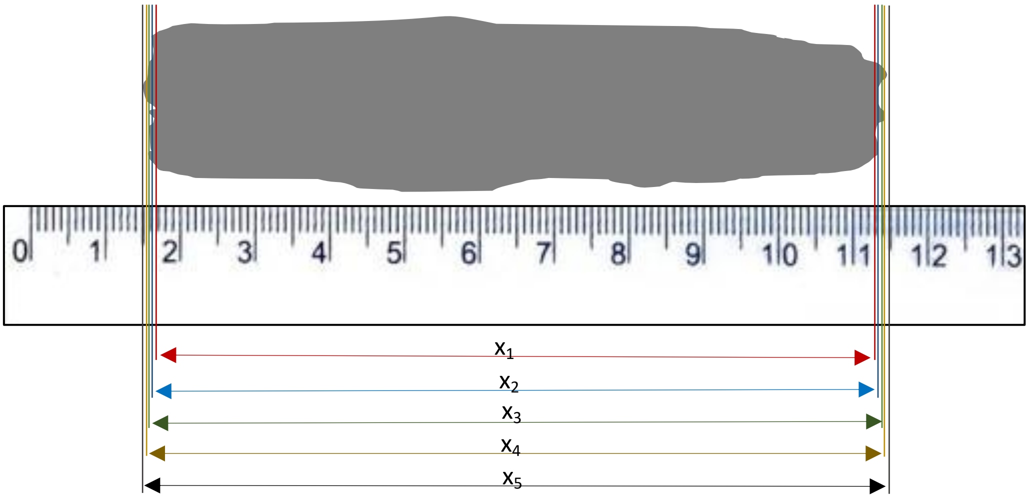
DŁUGOŚĆ PRZEDMIOTU WYNOSI:

x = (97 ±2.3)mm lub **x = 97 ±2.3 [mm]**

Przykład B

Wyznaczanie długości przedmiotu o krawędziach nieregularnych– wykonanie serii pomiarów

W celu wyznaczenia długości *x* przedmiotu o nieregularnych krawędziach użyto linijki z milimetrową działką elementarną. Wykonano serię 5 pomiarów długości w taki sposób aby otrzymane wartości charakteryzowały w sposób możliwie najlepszy rozkład nierówności krawędzi.



W Tabeli zamieszczono zmierzone wartości długości x_i:

i	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
$\boldsymbol{x_i}$ [mm]	96	97	98	99	100

Wartość średniej długości przedmiotu wynosi:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{96 + 97 + 98 + 99 + 100}{5} = \frac{490}{5} = 98.0\ mm$$

$$\boldsymbol{x = 98.0\ mm}$$

Na potrzeby oszacowania wartości niepewności wyznaczenia długości x przyjęto następujące założenia dla każdej zmierzonej wartości x_i:

a) niepewność wzorcowania użytego przyrządu pomiarowego wynosi: $\Delta_d(x)$ = 1 mm,
b) niepewność eksperymentatora wynosi $\Delta_e(x)$ = 2 mm i związana jest z niepewnością odczytania na skali przyrządu położeń każdego z dwóch punktów przeciwległych krawędzi.

W zastosowanej metodzie wyznaczenia x występują dwa typy niepewności: A i B. Wobec tego całkowitą niepewność wyznaczenia x szacujemy korzystając ze wzoru:

$$u(x) = \sqrt{u(x)_A^2 + \frac{u(x)_B^2}{3}}$$

Obliczamy wartości zmiennych zawartych w wyrażeniu podpierwiastkowym:

$$u(x)_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(96-98.0)^2 + (97-98.0)^2 + (98-98.0)^2 + (99-98.0)^2 + (100-98.0)^2}{5(5-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (2)^2}{20}} = \sqrt{\frac{4^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2}{20}} = \sqrt{\frac{34}{20}} = \sqrt{1.7} = 1.31$$

$$\approx 1.4\ mm$$

$$u(x)_A = 1.4mm$$

$$u(x)_B = \sqrt{\left(\Delta_d(x)\right)^2 + \left(\Delta_e(x)\right)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = 2.24 \approx 2.3\ mm$$

$$u(x)_B = 2.3\ mm$$

Obliczamy niepewność całkowitą:

$$u(x) = \sqrt{u(x)_A^2 + \frac{u(x)_B^2}{3}} = \sqrt{1.4^2 + \frac{2.3^2}{3}} = \sqrt{1.96 + \frac{5.29}{3}} = \sqrt{1.96 + 1.77} = \sqrt{3.73} = 1.94 \approx 2.0\ mm$$

$$u(x) = 2.0\ mm$$

DŁUGOŚĆ PRZEDMIOTU WYNOSI:

x = (98.0 ±2.0)mm lub **x = 98.0 ±2.0 [mm]**

Wartym zauważenia jest fakt, że wykonanie odpowiednio długiej serii pomiarów pozwala osiągnąć wynik końcowy o dokładności większej niż rozdzielczość pomiarowa przyrządu użytego do pomiarów.

b) z użyciem liniałów dla których jedna z krawędzi jest początkiem skali

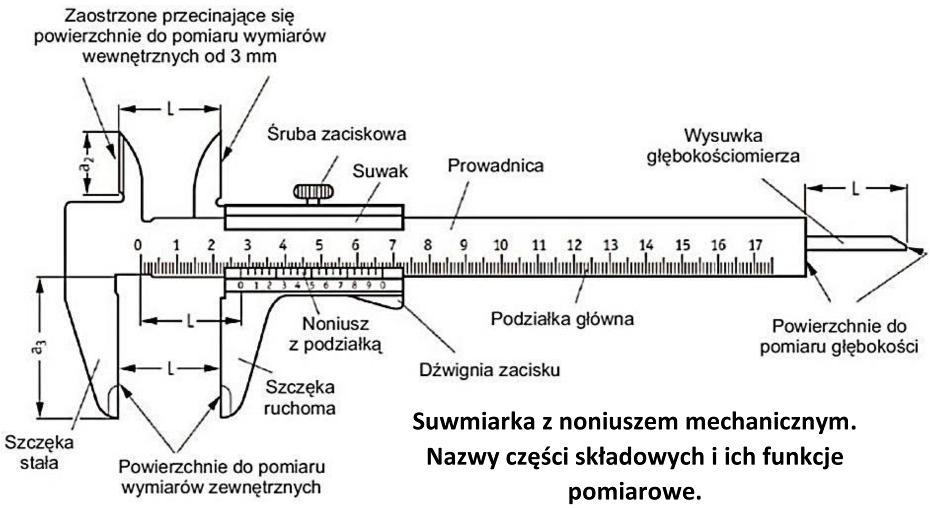
Podczas pomiaru liniał i przedmiot jednocześnie opieramy o wspólną płaską powierzchnię (np. blat stołu). Z uwagi na specyfikę naniesienia skali przyrząd ten używany jest do pomiarów przedmiotów posiadających wyraźnie zaznaczoną jedną z krawędzi. Podczas szacowania całkowitej niepewności pomiaru długości nie musimy uwzględniać niepewności wzorcowania i eksperymentatora związanych z określeniem położenia krawędzi opieranej o powierzchnię.

c) z użyciem taśm mierniczych lub dalmierzy laserowych

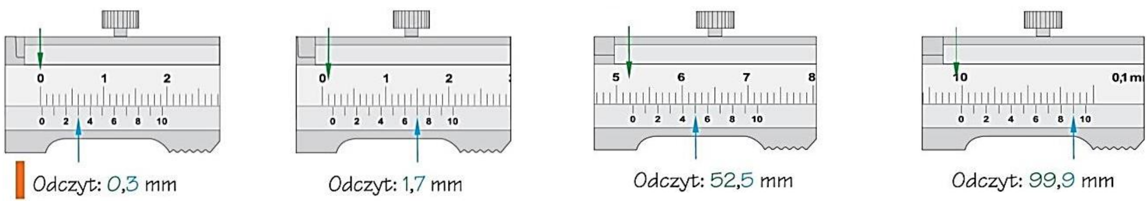
Należy pamiętać o wymaganym naprężeniu taśmy podczas pomiaru odległości. Należy dochować dużej staranności ułożenia taśmy mierniczej lub nakierowania wiązki światła lasera prostopadle względem powierzchni mierzonych, aby pomiar dostarczył wartości najkrótszej odległości.

d) z użyciem suwmiarek z noniuszem mechanicznym lub czujnikiem elektronicznym

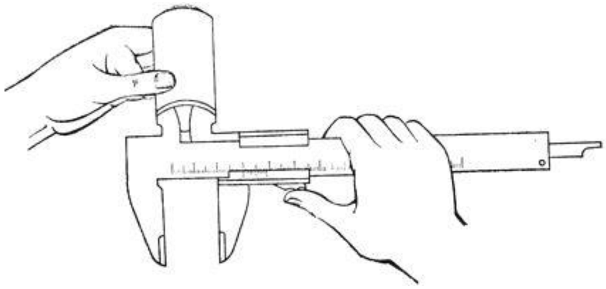
Suwmiarki stosujemy do pomiarów przedmiotów o przekrojach prostokątnych, średnic zewnętrznych lub wewnętrznych walców/rur, głębokości wnęk lub otworów.



Suwmiarka z noniuszem mechanicznym. Nazwy części składowych i ich funkcje pomiarowe.



Dziesiętne (jak na rysunku) lub setne (gdy dokładniejszy przyrząd pomiarowy) części milimetra określa się na podstawie odczytu miejsca pokrycia się działki podziałki głównej z działką podziałki noniusza.


a)

b)

Prawidłowy sposób uchwytu przedmiotu suwmiarką podczas dokonywania pomiaru średnicy zewnętrznej a) lub średnicy wewnętrznej b).

Suwmiarki cechuje duża rozdzielczość wartości mierzonej, zwykle wynosząca 0.1mm, 0.05mm lub 0.02mm. W związku z tym należy mieć na uwadze to, że są one w stanie wykryć obecność już niewielkich niedokładności wykonania mierzonych przedmiotów. Z założenia oczekujemy, że przedmiot o kształcie regularnym (kula, walec, prostopadłościan) zachowuje wymiary jak idealna bryła. W praktyce nigdy tak nie jest. Dlatego wymagane jest wykonanie serii $n \geq 5$ pomiarów tego samego wymiaru różnych fragmentów przedmiotu. W przypadku pomiaru średnicy kuli szczęki suwmiarki należy stopniowo zaciskać na mierzonej powierzchni i ciągle poruszać kulą przeciskając ją między szczękami. Robimy tak dopóki nie zaciśniemy szczękami kuli i nie uzyskamy największej wartości wskazania. Wtedy mamy pewność, że zmierzyliśmy średnicę kuli, a nie jedną z jej cięciw.

Przykład C
Pomiar średnicy kuli.

Z użyciem suwmiarki o rozdzielczości pomiarowej 0.02 mm wykonano serię n = 7 pomiarów średnicy Ø kuli, której wyniki zamieszczono w wierszu 1 poniższej Tabeli:

L.p.	*i*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	$\emptyset_i$ [mm]	12.61	12.46	12.50	12.52	12.50	12.54	12.52
2	$\emptyset$ [mm]	12.52						
3	$(\emptyset_i - \emptyset)^2$ [mm^2]	0.0081	0.0036	0.0004	0	0	0.0004	0
4	$\emptyset$ [mm]	12.51						
5	$(\emptyset_i - \emptyset)^2$ [mm^2]	-	0.0025	0.0001	0.0001	0.0001	0.0009	0.0001

Obliczamy średnią wartość średnicy kuli. Wynik tego obliczenia zawarto w wierszu 2 Tabeli.

$$\emptyset = \frac{\sum_{i=1}^{7} \emptyset_i}{7} = \frac{12.61 + 12.46 + 12.50 + 12.52 + 12.50 + 12.54 + 12.52}{7} = \frac{87.65}{7} = 12.52\ mm$$

Niepewność otrzymanej wartości Φ szacujemy w oparciu o wzór:

$$u(\emptyset) = \sqrt{u(\emptyset)_A^2 + \frac{u(\emptyset)_B^2}{3}},$$

w którym $u(\emptyset)_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\emptyset_i - \emptyset)^2}{n(n-1)}}$, gdzie *n = 7* – jest średnim odchyleniem standardowym, natomiast: $u(\emptyset)_B = 0.02\ mm$ – jest niepewnością wzorcowania użytej suwmiarki.

W wierszu 3 Tabeli zamieszczono kwadraty odchyleń $(\emptyset_i - \emptyset)^2$ wartości zmierzonych średnic i średniej. Zauważono, że dla wyniku pierwszego pomiaru (*i=1*) wartość kwadratu odchyłki jest wyraźnie większa w odniesieniu do pozostałych w serii. W Tabeli wartość tę wyróżniono kolorem czerwonym. Dlatego zdecydowano o wykluczeniu tego wyniku z serii a następnie wykonano obliczenie wartości średniej średnicy oraz i odpowiadających jej kwadratów odchyleń. Otrzymane wartości zamieszczono w wierszach 4 i 5 Tabeli, które następnie użyto do oszacowania wartości całkowitej niepewności wyznaczenia średnicy kuli.

$$u(\emptyset)_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(\emptyset_i - \emptyset)^2}{6(6-1)}} = \sqrt{\frac{0.0025 + 0.0001 + 0.0001 + 0.0001 + 0.0009 + 0.0001}{30}} = \sqrt{\frac{38 \cdot 10^{-4}}{30}}$$
$$= \sqrt{1.267} \cdot 10^{-2} = 1.12 \cdot 10^{-2} \approx 0.012\ mm$$

Całkowita niepewność średnicy kuli wynosi:

$$u(\emptyset) = \sqrt{u(\emptyset)_A^2 + \frac{u(\emptyset)_B^2}{3}} = \sqrt{(0.012)^2 + \frac{(0.02)^2}{3}} \sqrt{0.144 \cdot 10^{-4} + \frac{4 \cdot 10^{-4}}{3}} = 10^{-2}\sqrt{0.144 + 1.33}$$
$$= 10^{-2}\sqrt{1.474} = 1.21 \cdot 10^{-2} \approx 0.013\ \ m$$

ŚREDNICA KULI WYNOSI:

Ø = (12.51 ±0.013)mm lub **Ø = 12.51 ±0.013 [mm]**

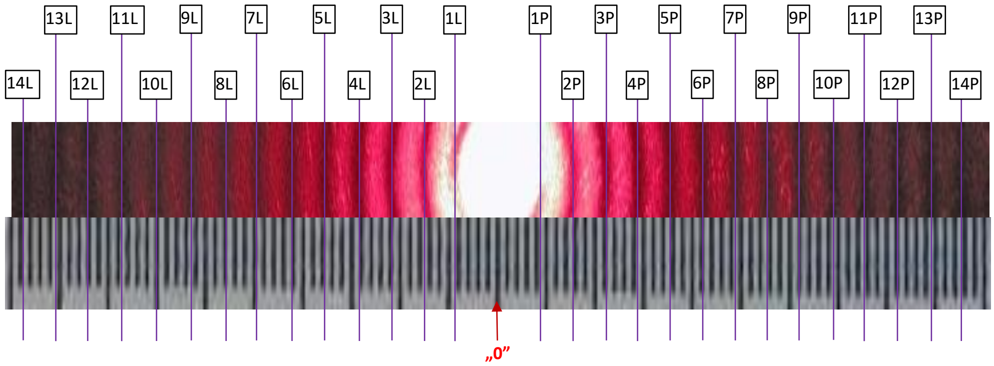
e) użycie mikroskopów pomiarowych

Pomiar odległości wymaga znajomości dwóch położeń krańcowych obiektu. Dla każdego z mierzonych położeń niepewność wzorcowania równa jest najmniejszej działce przyrządu. Niepewność eksperymentatora oceniana jest subiektywnie na podstawie oceny dokładności naprowadzenia znacznika przyrządu na wybrany punkt obrazu obserwowanego przez okular mikroskopu. Zwykle w takich przypadkach niepewność eksperymentatora powinna być szacowana indywidualnie dla każdego pomiaru.

Przykład D:
Pomiar obrazu dyfrakcyjnego z użyciem mikroskopu

Wiele mikroskopów pomiarowych posiada zintegrowane z śrubami mikrometrycznymi stoliki przedmiotowe, co umożliwia pomiary obserwowanego pola. Inną techniką pomiaru stosowaną w mikroskopach typu transmisyjnego jest umieszczenie w polu obserwacji nieruchomej półprzezroczystej skali z naniesioną podziałką o określonej wartości działki elementarnej. Na poniższym rysunku zamieszczono fragment pola obserwowanego przez okular mikroskopu.

Celem niniejszego przykładu jest wyznaczenie serii $i = 1..14$ średnich odległości Di ciemnych prążków dyfrakcyjnych od centralnego prążka jasnego znajdującego się w położeniu „0”. W celu ułatwienia odczytu położeń prążków oraz oszacowania niepewności eksperymentatora związanej z ich odczytem na obserwowany obraz naniesiono linie pomocnicze i je ponumerowano. Działka elementarna widocznej skali pomiarowej mikroskopu wynosi 0.01mm.



W poniższej Tabeli zebrano wartości odczytanych położeń prążków $\boldsymbol{x_{iL}}$ ($\boldsymbol{x_{iP}}$) i oszacowanych przez eksperymentatora niepewności $\Delta_e(x_{iL})$ ($\Delta_e(x_{iP})$) oraz wartości obliczonej odległości D_i wraz z jej niepewnością $u(D_i)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
i	$\boldsymbol{x_{iL}}$ [10^{-2} mm]	$\Delta_e(x_{iL})$ [10^{-2} mm]	$u(x_{iL})$ [10^{-2} mm]	$\boldsymbol{x_{iP}}$ [10^{-2} mm]	$\Delta_e(x_{iP})$ [10^{-2} mm]	$u(x_{iP})$ [10^{-2} mm]	D_i [10^{-2} mm]	$u(D_i)$ [10^{-2} mm]
1	**4**	2	1.3	**5**	2	1.3	**4**	**0.92**
2	**7**	1	0.82	**8**	2	1.3	**7.5**	**0.77**
3	**11**	1	0.82	**11**	1	0.82	**11**	**0.58**
4	**14**	1	0.82	**14**	1	0.82	**14**	**0.58**
5	**18**	1	0.82	**18**	2	1.3	**18**	**0.77**
6	**21**	1	0.82	**21**	1	0.82	**21**	**0.58**
7	**25**	1	0.82	**25**	1	0.82	**25**	**0.58**
8	**28**	2	1.3	**28**	1	0.82	**28**	**0.77**
9	**31**	1	0.82	**31**	2	1.3	**31**	**0.77**
10	**35**	1	0.82	**35**	1	0.82	**35**	**0.58**
11	**39**	2	1.3	**38**	1	0.82	**38**	**0.77**
12	**42**	2	1.3	**41**	1	0.82	**42**	**0.77**
13	**45**	2	1.3	**45**	2	1.3	**45**	**0.92**
14	**49**	2	1.3	**48**	2	1.3	**48**	**0.92**

Wartości niepewności położeń $u(x_{iL})$ znajdujące się w kolumnie 3 Tabeli obliczono następująco:

$$u(x_{iL}) = \sqrt{\frac{\left(\Delta_d(x_{iL})\right)^2 + \left(\Delta_e(x_{iL})\right)^2}{3}}$$

W powyższym wzorze przyjęto identyczną dla każdego $\Delta_d(x_{iL})$ wartość działki elementarnej skali jako niepewność wzorcowania $\Delta_d(x_{iL})$ = $1 \cdot 10^{-2}$ mm.

np. dla *i=2*:

$$u(x_{2L}) = \sqrt{\frac{\left(\Delta_d(x_{2L})\right)^2 + \left(\Delta_e(x_{2L})\right)^2}{3}} = \sqrt{\frac{(1)^2 + (1)^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{0.6667} = 0.816 \approx 0.82\ \ [10^{-2}\mathrm{mm}]$$

Analogicznie obliczono wartości $u(x_{iP})$ i zamieszono w kolumnie 5 Tabeli.

Zawarte w kolumnie 7 Tabeli wartości D_i obliczono ze wzoru:

$$D_i = \frac{x_{iL} + x_{iP}}{2}$$

np. dla *i=2*:

$$D_2 = \frac{x_{2L} + x_{2P}}{2} = \frac{7 + 8}{2} = \frac{15}{2} = 7.5\ [10^{-2}\mathrm{mm}]$$

Całkowitą niepewność długości $u(D_i)$ szacujemy metodą standardową:

$$u(D_i) = \sqrt{\left(\frac{\partial D_i}{\partial x_{iL}} u(x_{iL})\right)^2 + \left(\frac{\partial D_i}{\partial x_{iP}} u(x_{iP})\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot u(x_{iL})\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot u(x_{iP})\right)^2}$$

$$u(D_i) = \frac{\sqrt{u(x_{iL})^2 + u(x_{iP})^2}}{2}$$

np. dla *i=2*:

$$u(D_i) = \frac{\sqrt{(0.82)^2 + (1.3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(0.6724 + 1.69)}}{2} = \frac{\sqrt{2.3624}}{2} = \frac{1.5370}{2} = 0.768 \approx 0.77\ [10^{-2}\mathrm{mm}]$$

Wartości niepewności całkowitej wyznaczenia długości D_i zawarto w kolumnie 8 Tabeli.